Formulaire

Relations trigonométriques

$$
\begin{aligned}
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\
\sin(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\
\cos A \cos B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B)) \\
\sin A \cos B &= \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B)) \\
\sin A \sin B &= \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))
\end{aligned}
$$

Transformées de FOURIER

$$
\begin{aligned}
rect(\frac{t}{T}) &\leftrightarrow T\, sinc(fT) \\
sinc(2Wt) &\leftrightarrow \frac{1}{2W}\, rect(\frac{f}{2W}) \\
e^{-at}u(t),\ a>0 &\leftrightarrow \frac{1}{a+2\pi jf} \\
e^{-a|t|},\ a>0 &\leftrightarrow \frac{2a}{a^2+(2\pi f)^2} \\
e^{-\pi t^2} &\leftrightarrow e^{-\pi f^2} \\
\delta(t) &\leftrightarrow 1 \\
1 &\leftrightarrow \delta(f) \\
\delta(t-t_0) &\leftrightarrow e^{-2\pi jft_0} \\
e^{2\pi jf_ct} &\leftrightarrow \delta(f-f_c) \\
\cos(2\pi f_ct) &\leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right] \\
\sin(2\pi f_ct) &\leftrightarrow \frac{1}{2j}\left[\delta(f-f_c)-\delta(f+f_c)\right] \\
sgn(t) &\leftrightarrow \frac{1}{\pi jf} \\
\frac{1}{\pi t} &\leftrightarrow -j\, sgn(f) \\
\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\delta(t-iT_0) &\leftrightarrow \frac{1}{T_0}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-\frac{n}{T_0})
\end{aligned}
$$

1. Soit le signal
$$x(t) = 2\,\cos(500\pi t)\cos(942,48\,t) \tag{1}$$
   (a) Déterminez et dessinez la transformée de FOURIER de ce signal.
   (b) Déterminez la fréquence d'échantillonnage minimale pour ce signal.
   (c) Pour numériser ce signal, nous choisissons une fréquence d'échantillonnage de $1200\,[Hz]$. On désire le quantifier à l'aide d'une courbe de quantification mid-rise. Choisissez le nombre minimum de bits nécessaire à la quantification afin que l'erreur maximale de quantification ne dépasse pas $0,25$ Volts. De plus, on vous demande de dessinez la courbe de quantification.
   (d) Calculez le débit binaire.
   (e) Après numérisation, nous obtenons la suite de bits :
$$1\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,0\,0$$
   On module alors ce signal à l'aide d'une modulation PAM-4. Dessinez l'onde résultante et calculez la bande passante de ce signal.
   (f) Dessinez approximativement la densité spectrale du signal obtenu en (e) en précisant les abscisses.
   (g) Si nous avions choisi une modulation RZ unipolaire, quelle onde et quelle bande passante aurait-on obtenu ?

2. Un signal stochastique $Y(t)$ est obtenu par différence entre $X(t)$ et ce signal $X(t)$ au temps $t - T$, avec des coefficients respectifs α et $1 - \alpha$:

$$Y(t) = \alpha X(t) - (1 - \alpha)X(t - T) \tag{2}$$

$X(t)$ est supposé stationnaire au sens large ; sa fonction d'autocorrélation et sa densité spectrale sont respectivement notés $\Gamma_{XX}(\tau)$ et $\gamma_X(f)$.

(a) $Y(t)$ est-il un signal stationnaire ?

(b) Déterminez analytiquement la densité spectrale de $\gamma_Y(f)$.

(c) Comparez les densités spectrales de $\gamma_Y(f)$ lorsque $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$. Commentez votre réponse.

Pour la suite de la question, on considère que $\alpha = \frac{1}{2}$.

(d) Dessinez l'allure de $\gamma_Y(f)$ lorsque $X(t)$ est un bruit blanc de densité spectrale d'amplitude N_0, dont la bande de base s'étend de 0 à $\frac{1}{T}$.

(e) Dessinez l'allure de $\gamma_Y(f)$ lorsque $X(t)$ est un signal NRZ de période T.

(f) Faut-il préférer le signal $Y(t)$ plutôt qu'un signal $X(t)$ de type NRZ sur une paire torsadée ?

(g) Si l'on dispose d'un signal $X(t)$ de type NRZ et que l'on souhaite moduler le signal par $\cos(2\pi ft)$, choisiriez-vous le signal $Y(t)\cos(2\pi ft)$ ou le signal $X(t)\cos(2\pi ft)$? Argumentez votre réponse.

(h) Soit $X(t)$ un signal réel de densité spectrale constante, limitée à la bande $[0, \frac{1}{T}]$, et de puissance égale à $5\,[W]$. Que valent les puissances de $Y(t)$ et de $Y(t)\cos(2\pi ft)$?

3. La station spatiale internationale se situe à $400\,[km]$ de la terre. Les astronautes sur cette station communiquent avec la terre à l'aide d'une antenne parfaitement alignée qui possède un gain de $40\,[dB]$ et une efficacité de $0,57$. Les signaux émis sont reçus au droit de la terre par une antenne possédant un angle d'ouverture $\theta_{3dB} = 2^o$ et une efficacité de $0,6$. Cette antenne présente un défaut d'alignement de 3^o.

   La communication s'effectue à $14\,[GHz]$ et l'on sait que, pour garantir une bonne réception, la puissance reçue par l'antenne terrestre doit dépasser $0,1\,[\mu W]$.

   On considère que les pertes dans les systèmes électriques, les pertes de polarisation et les pertes dues à l'atmosphère sont négligeables.

   (a) Calculez le diamètre de l'antenne d'émission située sur la station.

   (b) Déterminez l'affaiblissement en espace libre subi par le signal.

   (c) Déterminez le gain de l'antenne de réception.

   (d) Déterminez la puissance d'émission en $[dBW]$ et en $[dBm]$.

   (e) Définissez et déterminez le PIRE.

   (f) À quelle valeur d'intensité de champ électrique correspond la valeur de la puissance reçue minimale de l'antenne terrestre ?

<u>Pour rappel :</u>

$$\theta_{3dB}[^\circ] = 70\,\frac{\lambda}{D} \tag{3}$$

$$G(\alpha)\,[dB] = G_{\text{max}}[dB] - 12\left(\frac{\alpha}{\theta_{3dB}}\right)^2 \tag{4}$$

4. **[Théorie]**
   Soyez le plus complet possible et veillez à donner la signification de tous les acronymes que vous utilisez.
   (a) Définissez la notion d'efficacité spectrale.
   (b) Pourquoi un utilisateur GSM est-il identifié par plusieurs numéros distincts ? Quelles sont les fonctions de ces différents numéros ?
   (c) Quelle est l'onde de mise en forme utilisée pour la transmission de données par paires torsadées conforme à la norme Ethernet ?
   (d) Quelle est donc la largeur de bande d'un signal Ethernet à $100\,[Mb/s]$? Argumentez votre réponse.