

# **Application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture**

Thèse de doctorat en sciences appliquées

**Marc Duflot**

Université de Liège  
2004

© Marc Duflot 2004

Reproduction, distribution et modification libres à condition que  
l'attribution du copyright et cette permission soient conservées.

# Résumé

La méthode sans maillage est un outil numérique utilisé pour résoudre des problèmes de mécanique des solides. Comparable à la méthode des éléments finis, elle présente la différence de se baser seulement sur un ensemble de nœuds répartis dans le solide sans requérir un maillage de celui-ci. Cette caractéristique en fait une méthode particulièrement utile pour résoudre les problèmes de propagation de fissures rencontrés en mécanique de la rupture. Il n'est en effet pas nécessaire de construire un maillage qui se conforme aux lèvres de la fissure à chaque pas de la simulation de la propagation.

Une technique d'enrichissement de l'approximation au voisinage du front de fissure est présentée. Celle-ci permet de représenter le champ de contrainte singulier avec précision sans réclamer un nombre de degrés de liberté trop important. Quelques cas simples permettent de valider cette technique tant à deux qu'à trois dimensions en vérifiant la qualité des facteurs d'intensité de contrainte extraits des solutions numériques. La méthode peut alors être appliquée à des problèmes concrets de propagation lente de fissures sous des charges répétées, y compris dans des cas complexes de solides multiplement fissurés où des fissures tridimensionnelles se propagent en gauchissant.

À côté de ces problèmes de mécanique de la rupture, une méthode sans maillage d'équilibre est présentée. Elle consiste à obtenir une solution qui vérifie exactement l'équilibre et permet par analyse duale avec la méthode de déplacement habituelle une estimation globale de l'erreur.



# Remerciements

Cette thèse de doctorat est le fruit des financements du Fonds Pisart de l'université de Liège pour la période 1998–1999 et du Fonds national pour la recherche scientifique pour la période 1999–2003. Je suis profondément reconnaissant envers ces fonds pour cette possibilité qui m'a été offerte. Le poste d'assistant que m'a procuré l'université de Liège durant l'année académique 2003–2004 m'a permis d'achever la rédaction de cette thèse.

Je tiens à remercier les membres de mon jury pour le temps qu'ils m'ont consacré :

- M. le professeur P. Beckers de l'université de Liège (président),
- M. le professeur I. Doghri de l'université catholique de Louvain,
- M. le professeur N. Moës de l'école centrale de Nantes,
- Dr M. Bruyneel de Samtech S.A.,
- Dr P. Duysinx de l'université de Liège et
- Dr J.-Ph. Ponthot de l'université de Liège.

Il m'est agréable de remercier mon promoteur M. le professeur Nguyen-Dang Hung et les chercheurs passés et présents du service de Mécanique de la rupture des solides qui surent m'épauler pendant toute la durée de mes recherches.

Cette thèse est dédiée à mon épouse Caroline et à mes filles Coline et Camille.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Position du problème . . . . .	1
1.1.1	La fissuration et les autres modes de ruine . . . . .	1
1.1.2	Rupture et endommagement . . . . .	2
1.1.3	Méthodes numériques en mécanique de la rupture . . . . .	4
1.2	Historique . . . . .	6
1.2.1	Les différentes méthodes sans maillage . . . . .	6
1.2.2	La méthode sans maillage en mécanique de la rupture . . . . .	7
1.3	Aperçu de la thèse . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Mécanique linéaire de la rupture</b>	<b>9</b>
2.1	Élastostatique . . . . .	9
2.2	Analyse des corps fissurés bidimensionnels . . . . .	12
2.2.1	Modes fondamentaux de rupture et facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	12
2.2.2	Équation des champs de contrainte et de déplacement en front de fissure . . . . .	14
2.2.3	Intégrale J . . . . .	19
2.3	Fissuration par fatigue . . . . .	22
2.4	Analyse des corps fissurés tridimensionnels . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Méthode sans maillage</b>	<b>27</b>
3.1	Approximation au sens des moindres carrés mobiles . . . . .	28
3.1.1	Approximation classique au sens des moindres carrés . . . . .	28
3.1.2	Définition de l'approximation MLS . . . . .	30
3.1.3	Propriétés des fonctions de forme MLS . . . . .	32
3.1.4	Choix des fonctions de base . . . . .	34
3.1.5	Choix des fonctions poids . . . . .	35
3.1.6	Algorithmes pour le calcul efficace des fonctions de forme MLS . . . . .	38
3.2	Méthodes des éléments finis et sans maillage . . . . .	43
3.2.1	Méthode des éléments finis . . . . .	43
3.2.2	Méthode sans maillage . . . . .	46
3.3	Imposition des conditions aux limites essentielles . . . . .	46
3.3.1	Principe variationnel modifié avec des multiplicateurs de Lagrange . . . . .	47
3.3.2	Principe variationnel modifié sans multiplicateurs de Lagrange . . . . .	48
3.3.3	Principe variationnel modifié avec une pénalité . . . . .	48

3.3.4	Connexion à un maillage éléments finis . . . . .	49
3.3.5	Propriété d'interpolation grâce à des fonctions de forme singulières . . . . .	49
3.4	Intégration . . . . .	49
3.5	Méthode strictement sans maillage . . . . .	51
3.5.1	Aperçu des méthodes strictement sans maillage . . . . .	51
3.5.2	Quadrature MLS . . . . .	52
3.5.3	Conclusions . . . . .	54
3.6	Résumé . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Méthode sans maillage en rupture à deux dimensions</b>	<b>57</b>
4.1	Représentation des fissures . . . . .	57
4.1.1	Critère de visibilité . . . . .	58
4.1.2	Critère de diffraction . . . . .	59
4.1.3	Critère de transparence . . . . .	60
4.1.4	Modèle de la cale . . . . .	61
4.1.5	Modèle de l'extension virtuelle de la fissure . . . . .	61
4.1.6	Choix du critère et implémentation . . . . .	62
4.2	Distribution nodale . . . . .	64
4.3	Enrichissement en front de fissure . . . . .	65
4.3.1	Élément fini enrichi . . . . .	66
4.3.2	Enrichissement extrinsèque de l'approximation MLS . . . . .	67
4.3.3	Enrichissement par les fonctions de base . . . . .	68
4.3.4	Enrichissement par les fonctions poids . . . . .	68
4.4	Intégration . . . . .	71
4.5	Calcul des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	73
4.6	Propagation des fissures . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Résultats pour les problèmes à deux dimensions</b>	<b>77</b>
5.1	Fissures centrée et débouchante . . . . .	78
5.1.1	Fissure centrée . . . . .	78
5.1.2	Fissure débouchante . . . . .	79
5.2	Fissure inclinée statique . . . . .	79
5.3	Propagation quasi-statique d'une fissure dans une DCB . . . . .	82
5.4	Propagation par fatigue d'une fissure inclinée débouchante . . . . .	83
5.5	Propagation par fatigue de deux fissures . . . . .	85
5.6	Conclusions . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Méthode sans maillage en rupture à trois dimensions</b>	<b>91</b>
6.1	Représentation des fissures . . . . .	91
6.2	Distribution nodale . . . . .	95
6.3	Enrichissement en front de fissure . . . . .	96
6.4	Intégration . . . . .	98
6.5	Calcul des facteurs d'intensité de contrainte . . . . .	99
6.6	Propagation des fissures . . . . .	100
6.7	Comparaison avec la méthode à deux dimensions . . . . .	101



<b>7</b>	<b>Résultats pour les problèmes à trois dimensions</b>	<b>103</b>
7.1	Fissure débouchante en traction . . . . .	103
7.2	Fissure circulaire en traction . . . . .	106
7.3	Fissure circulaire en cisaillement . . . . .	108
7.4	Fissure circulaire en torsion . . . . .	110
7.5	Propagation d'une fissure inclinée . . . . .	112
7.6	Propagation de deux fissures . . . . .	115
7.7	Conclusions . . . . .	117
<b>8</b>	<b>Analyse duale par une méthode sans maillage</b>	<b>119</b>
8.1	Analyse duale . . . . .	120
8.2	Méthodes sans maillage de déplacement et d'équilibre . . . . .	121
8.2.1	Méthode sans maillage de déplacement . . . . .	121
8.2.2	Méthode sans maillage d'équilibre . . . . .	123
8.3	Exemples numériques . . . . .	125
8.3.1	Poutre encastree . . . . .	125
8.3.2	Plaque fissurée . . . . .	126
8.4	Conclusions . . . . .	128
<b>9</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>131</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>133</b>



# Table des figures

1.1	Singularité des contraintes . . . . .	3
1.2	Trois méthodes numériques pour l'analyse des corps fissurés . . . . .	5
2.1	Corps fissuré et repère en front de fissure . . . . .	13
2.2	Les trois modes fondamentaux . . . . .	13
2.3	Fissure dans une plaque infinie soumise aux trois sollicitations . . . . .	14
2.4	Intégrale $J$ . . . . .	20
2.5	Taux d'accroissement d'une fissure en fonction de l'écart entre les facteurs d'intensité de contrainte extrêmes d'un cycle de charge cyclique	23
2.6	Corps fissuré et repère en front de fissure à trois dimensions . . . . .	26
3.1	Méthode des éléments finis et méthode sans maillage . . . . .	27
3.2	Approximation au sens des moindres carrés de certains points par une droite . . . . .	29
3.3	Interpolation par éléments finis et approximation sans maillage . . . . .	32
3.4	Distribution régulière de $5 \times 5$ nœuds . . . . .	37
3.5	Fonction poids et fonctions de forme . . . . .	37
3.6	Maillage éléments finis sur $5 \times 5$ nœuds . . . . .	37
3.7	Fonction de forme éléments finis . . . . .	37
3.8	Quadtree pour sélectionner les nœuds . . . . .	40
3.9	Intégration . . . . .	50
3.10	Quadrature MLS . . . . .	54
4.1	Domaines d'influence pour le critère de visibilité . . . . .	59
4.2	Domaines d'influence pour le critère de diffraction . . . . .	59
4.3	Domaines d'influence pour le critère de transparence . . . . .	60
4.4	Domaines d'influence pour le modèle de la cale . . . . .	61
4.5	Domaines d'influence pour le modèle de l'extension virtuelle de la fissure	61
4.6	Vecteurs de position du milieu et vecteurs directeurs de deux segments	62
4.7	Domaines d'influence autour d'une fissure avec un angle . . . . .	63
4.8	Chemins en présence de plusieurs fissures . . . . .	63
4.9	Distribution nodale régulière de base . . . . .	64
4.10	Distribution nodale régulière modifiée . . . . .	65
4.11	Élément fini singulier . . . . .	66
4.12	Taille limitée du support pour ne pas contenir d'angle . . . . .	70
4.13	Poids enrichis en fonction de l'angle . . . . .	70
4.14	Poids enrichis en fonction de la distance . . . . .	71
4.15	Fonctions de forme enrichies . . . . .	72

4.16	Division en cellules non-conformes à la fissure . . . . .	73
4.17	Domaine pour le calcul des intégrales d'interaction . . . . .	74
4.18	Prolongation de la fissure . . . . .	75
5.1	Fissure centrée . . . . .	78
5.2	Fissure débouchante . . . . .	80
5.3	Distribution nodale pour la fissure inclinée . . . . .	81
5.4	Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure inclinée . . . . .	81
5.5	Géométrie de la <i>double cantilever beam</i> . . . . .	82
5.6	Facteurs d'intensité de contrainte pour la DCB ( $\Delta a = 5\text{ mm}$ ) . . . . .	83
5.7	Chemin suivi par la fissure ( $\Delta a = 8\text{ mm}$ ) . . . . .	83
5.8	Chemin suivi par la fissure ( $\Delta a = 5\text{ mm}$ ) . . . . .	84
5.9	Chemin suivi par la fissure ( $\Delta a = 3\text{ mm}$ ) . . . . .	84
5.10	Chemin suivi par la fissure prédit par la méthode enrichie pour différents pas . . . . .	84
5.11	Facteurs d'intensité de contrainte de la fissure simple en fatigue . . . . .	86
5.12	Extension en fonction du nombre de cycles de la fissure simple en fatigue . . . . .	86
5.13	Distribution nodale et chemin de la fissure simple en fatigue . . . . .	87
5.14	Chemin des fissures pour l'exemple de la paire de fissures en fatigue . . . . .	88
5.15	Facteurs d'intensité de contrainte pour l'exemple de la paire de fissures en fatigue . . . . .	88
5.16	Extension en fonction du nombre de cycles pour l'exemple de la paire de fissures en fatigue . . . . .	89
5.17	Agrandissement du chemin suivi par la paire de fissures . . . . .	90
6.1	Deux représentations d'une fissure circulaire par deux ensembles de triangles . . . . .	92
6.2	Critères de visibilité, de diffraction et de transparence à trois dimensions . . . . .	93
6.3	Vecteurs de position et vecteurs directeurs d'un segment et d'un triangle . . . . .	94
6.4	Chemin de I à B s'appuyant sur un segment . . . . .	94
6.5	Distribution nodale régulière de base . . . . .	95
6.6	Nœuds ajoutés à la distribution régulière . . . . .	96
6.7	Transformation angulaire si la fissure fait un angle . . . . .	97
6.8	Division en cellules non-conformes à la fissure . . . . .	98
6.9	Domaine pour le calcul des intégrales d'interaction . . . . .	99
6.10	Propagation de la fissure . . . . .	100
6.11	Nouvelle fissure . . . . .	101
7.1	Fissure débouchante dans un cube en traction . . . . .	104
7.2	Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure débouchante ( $a = 1, 6$ ) . . . . .	104
7.3	Facteurs d'intensité de contrainte normalisés pour la fissure débouchante . . . . .	105
7.4	Fissure circulaire dans un cube en traction . . . . .	107
7.5	Supports des nœuds enrichis . . . . .	107
7.6	Énergie pour la fissure circulaire en traction . . . . .	107
7.7	Fissure circulaire dans un cube en cisaillement . . . . .	108
7.8	Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure en cisaillement . . . . .	109

7.9	Énergie pour la fissure circulaire en cisaillement . . . . .	109
7.10	Fissure circulaire dans un cube en torsion . . . . .	110
7.11	Facteur d'intensité de contrainte pour la fissure en torsion . . . . .	111
7.12	Énergie pour la fissure circulaire en torsion . . . . .	111
7.13	Fissure circulaire inclinée dans un cube en traction . . . . .	112
7.14	Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure inclinée . . . . .	113
7.15	Neuf pas de la propagation de la fissure inclinée . . . . .	113
7.16	Fissure inclinée après propagation . . . . .	114
7.17	Paire de fissures dans un cube en traction . . . . .	115
7.18	Six pas de la propagation de la paire de fissures . . . . .	116
7.19	Paire de fissures après propagation . . . . .	116
8.1	Poutre encastree soumise à un cisaillement (17 × 9 nœuds) . . . . .	126
8.2	Courbes de convergence pour le problème de la poutre . . . . .	127
8.3	Demi-plaque fissurée (21 × 21 nœuds) . . . . .	127
8.4	Courbes de convergence pour le problème de la fissure . . . . .	128



# Liste des tableaux

5.1	Facteurs d'intensité de contrainte du mode I pour la fissure centrée . . . . .	79
5.2	Facteurs d'intensité de contrainte du mode I pour la fissure débouchante . . . . .	80
7.1	Facteurs d'intensité de contrainte normalisés pour la fissure débouchante . . . . .	105
7.2	Facteurs d'intensité de contrainte normalisés et énergies pour la fissure circulaire en traction . . . . .	106
7.3	Énergie pour la fissure circulaire en cisaillement . . . . .	109
7.4	Énergie pour la fissure circulaire en torsion . . . . .	111
8.1	Résultats pour le problème de la poutre . . . . .	126
8.2	Résultats pour le problème de la fissure . . . . .	128





# Chapitre 1

## Introduction

Dans l'introduction de cette thèse, nous donnons d'abord le cadre dans lequel se place ce travail, retraçons ensuite l'historique des méthodes sans maillage et offrons enfin un plan des chapitres suivants.

### 1.1 Position du problème

L'objet de cette thèse est de contribuer au développement de l'application des méthodes numériques dites *sans maillage* à la simulation par la *mécanique de la rupture* de la *fissuration* des solides. Pour cerner correctement l'objet, il convient de placer les trois termes importants, qui sont mis en évidence dans la phrase précédente, dans un champ plus large et à donner les hypothèses et limites dans lesquelles ce travail se trouve. Cela revient à situer

1. la fissuration parmi les modes de ruine des structures,
2. la mécanique de la rupture parmi les modèles traitant de la fissuration des structures et
3. les méthodes sans maillage parmi les méthodes numériques applicables en mécanique de la rupture.

#### 1.1.1 La fissuration et les autres modes de ruine

Les modes de ruine en mécanique des solides sont nombreux. Parmi les principaux, la ruine due à la fissuration est un danger essentiel à prendre en compte lors de la conception de structures à côté d'autres modes comme la ruine par déformation plastique, flambement, fluage, corrosion, etc. La fissuration prend en compte l'existence de défauts de fabrication comme des inclusions ou des vides dans le matériau ou encore de zones d'endommagement à partir desquels des fissures vont s'initier puis se propager pour parvenir à une taille où la structure atteint la ruine.

Différents types de fissuration sont à distinguer :

- la fissuration stable qui comprend
  - la fissuration quasi-statique sous une charge constante,
  - la fissuration par fatigue sous une charge répétée et
  - la fissuration dynamique lorsqu'une charge est appliquée soudainement ;

- la fissuration instable qui est instantanée et à laquelle peut conduire la fissuration stable.

Dans cette thèse, nous ne considérons pas la fissuration dynamique en négligeant les forces d’inertie bien que la méthode numérique que nous allons décrire et les contributions que nous allons lui apporter s’y appliquent.

## 1.1.2 Rupture et endommagement

Il y a principalement deux modèles pour représenter la fissuration des structures : la mécanique de l’endommagement et la mécanique de la rupture. Nous décrivons brièvement la première et plus longuement la seconde, qui est l’objet de cette thèse.

Selon la mécanique de l’endommagement, les défauts comme les micro-fissures et la croissance de ceux-ci sont pris en compte de manière continue par le biais de variables d’endommagement. Celles-ci sont des variables internes qui représentent l’état du matériau. Ainsi, une partie du matériau contenant des défauts possède des variables d’endommagement de valeur élevée, qui donnent une dégradation des propriétés matérielles. Dans un modèle simple, la relation entre les contraintes  $\sigma$  et les déformations  $\varepsilon$  en présence d’endommagement devient  $\sigma = (1 - D) E \varepsilon$ , où  $E$  est le module de Young et  $D$  est la variable d’endommagement variant entre 0 et 1 pour laquelle il reste à postuler un modèle d’évolution. La mécanique de l’endommagement est appropriée pour représenter l’initiation de la fissuration à partir de micro-fissures mais aussi d’autres modes de ruine comme le fluage, par exemple.

Au contraire de cette théorie continue, la mécanique de la rupture suppose l’existence d’une ou plusieurs macro-fissures présentes dans le matériau de part et d’autre desquelles les déplacements, déformations et contraintes sont discontinus. La mécanique de la rupture peut s’appliquer soit en conception et dimensionnement après une analyse d’endommagement qui prédit une bande de fort endommagement qui devient modélisée par une fissure, soit en production si une fissure est décelée dans une structure en service pour évaluer la durée de vie résiduelle de celle-ci.

Les fissures sont des nouvelles frontières internes. On appelle *lèvres de la fissure* les deux surfaces qui forment la nouvelle frontière d’une fissure. Les lèvres sont reliées par une courbe qu’on appelle le *front de fissure*. Cette courbe est ouverte pour une fissure débouchante et fermée pour une fissure interne. Dans une analyse ramenée à deux dimensions, les lèvres sont deux courbes (deux segments de droite dans le cas le plus simple) et le front un simple point pour une fissure débouchante et deux points pour une fissure interne. On parle aussi de *pointe(s) de la fissure* dans ce cas. Notons que dans cette thèse, nous ne nous limitons pas au cas bidimensionnel comme c’est le cas dans l’écasante majorité des travaux antérieurs en mécanique de la rupture et avons pour objectif de simuler la propagation de fissures quelconques à trois dimensions, ce qui est le défi majeur de ces dernières années en mécanique de la rupture numérique.

Les équations à résoudre pour obtenir les déplacements, déformations et contraintes en tout point du solide fissuré sont les mêmes que celles pour le solide non-fissuré mais une condition aux limites supplémentaire sur les nouvelles frontières internes est imposée : les tractions sont connues sur les deux lèvres de la fissure, généralement nulles dans le cas habituel où aucune force n’est exercée sur les bords. Il est

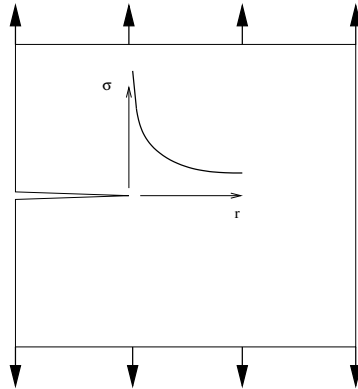


FIG. 1.1 – Singularité des contraintes

nécessaire de formuler une loi de comportement pour le matériau étudié. Si le matériau est *fragile*, un comportement élastique est admis. Il résulte de cette loi que les contraintes deviennent infinies au front de fissure. Cette singularité des contraintes, illustrée sur la figure 1.1, est proportionnelle à l'inverse de la racine carrée de la distance au front. De manière simplifiée et en anticipant sur le chapitre 2, sur une ligne dans le prolongement de la fissure, la tension est exprimée sous la forme

$$\sigma = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.1)$$

où  $r$  est la distance au front et  $K$  est appelé *facteur d'intensité de contrainte*. Il dépend de la longueur de la fissure, de la géométrie et des forces appliquées. Cette équation montre que, quel que soit le matériau, il y a une zone de déformation plastique. L'hypothèse de matériau fragile, qui revient à négliger la plasticité dans cette zone, est justifiée et satisfaisante pour décrire le comportement d'un matériau si cette zone est suffisamment petite. Dans le cas contraire, le matériau est dit *ductile* et une loi de comportement élasto-plastique est adoptée. Hormis le critère sur la taille de la zone plastique qui est quelque peu imprécis, nous pouvons déterminer si la théorie de la mécanique de la rupture élastique linéaire (matériau fragile) est adéquate ou bien si la théorie de la mécanique de la rupture élasto-plastique (matériau ductile) est nécessaire en se basant sur un critère énergétique : dans le premier cas, l'essentiel de l'énergie dissipée est dû à la formation de nouvelles surfaces de fissure alors que dans le second, c'est dû à la déformation plastique. Le rapport entre ces deux énergies donne un ordre de grandeur de l'erreur commise en adoptant le modèle élastique. Dans cette thèse, nous nous limitons au comportement élastique.

Afin de prévoir le comportement du matériau fissuré, il reste à postuler une loi d'évolution pour l'accroissement de la fissure, tout comme il est nécessaire de postuler une loi d'évolution pour la variable d'endommagement  $D$  en mécanique de l'endommagement. Notons que c'est dans cette évolution des frontières du domaine du corps en fonction des déplacements et contraintes dans ce corps et dans le comportement non-linéaire qui en découle même si la loi de comportement est elle-même linéaire que réside toute l'originalité de la mécanique de la rupture. L'approche est donc toute différente de la mécanique de l'endommagement qui est continue et où la non-linéarité vient plus simplement de la dépendance de la loi d'évolution de  $D$

en les déplacements et contraintes. Le modèle le plus commun pour la rupture instable est simplement de postuler qu'elle se produit quand le facteur d'intensité de contrainte  $K$  de l'équation (1.1) dépasse une certaine valeur critique  $K_c$ , appelée ténacité, qui dépend du matériau et de l'environnement. Pour la rupture stable, il existe plusieurs modèles empiriques qui diffèrent beaucoup dans l'étendue de leur champ d'application et dans leur complexité. Dans cette thèse qui est orientée vers le développement d'une procédure numérique de simulation, nous nous limitons dans la section 2.3 au seul modèle de Paris qui reste simple et dont le champ d'application en fissuration par fatigue est appréciable. Gardons à l'esprit que notre travail peut servir de support dans lequel différents modèles empiriques pourront être introduits aux fins de leur confrontation face à des résultats expérimentaux.

*En raccourci, les problèmes résolus dans cette thèse sont des problèmes de propagation de fissures limités aux matériaux élastiques linéaires, sans effet dynamique, gouvernés par la loi de Paris mais aussi bien à deux qu'à trois dimensions.*

### 1.1.3 Méthodes numériques en mécanique de la rupture

La fissuration est simulée par une méthode numérique à l'aide d'analyses successives. Une première analyse résout les équations aux dérivées partielles qui modélisent le comportement du solide fissuré en tenant compte des charges appliquées et des déplacements imposés pour obtenir une estimation des déplacements, déformations et contraintes en tout point de ce solide. L'intensité et la variation de ces champs à proximité du front de fissure sont ramenées à quelques grandeurs caractéristiques qui sont introduites dans le modèle de fissuration choisi pour obtenir la direction et la longueur de propagation de la fissure. En mécanique linéaire de la rupture par exemple, ces grandeurs caractéristiques sont les trois facteurs d'intensité de contrainte. En ajoutant l'incrément de fissure prédit par le modèle au front de fissure, nous obtenons une nouvelle fissure, qui est la nouvelle frontière interne pour l'analyse suivante qui donnera les nouveaux champs de déplacement, déformation et contrainte et ainsi de suite.

Si la méthode des éléments finis classique a montré son efficacité et sa puissance pour résoudre de nombreux problèmes en mécanique des solides, elle est moins adaptée pour réaliser les analyses successives d'un problème de fissuration. En effet, pour appliquer cette méthode, une division (appelée *maillage*) du domaine en sous-domaines dont les frontières doivent correspondre aux frontières du domaine est nécessaire. Comme les frontières internes changent d'une analyse à l'autre, cette opération de maillage doit être recommencée à chaque étape, au moins dans une zone entourant la formation des nouvelles frontières. Cette opération peut être coûteuse en temps de calcul. Si une telle approche est envisageable à deux dimensions (voir par exemple Bouchard *et al.* (2000); Givoli et Zusman (2002)) et pour les fissures planes à trois dimensions (voir par exemple Dhondt (1998); Schöllmann, Fulland et Richard (2003)), il semble irréaliste de procéder de cette manière pour des fissures tridimensionnelles arbitraires. On distingue trois familles principales de méthodes numériques plus appropriées que la méthode classique des éléments finis pour la propagation de fissures. Nous les schématisons sur la figure 1.2 et les décrivons ci-dessous dans l'ordre chronologique de leur apparition.

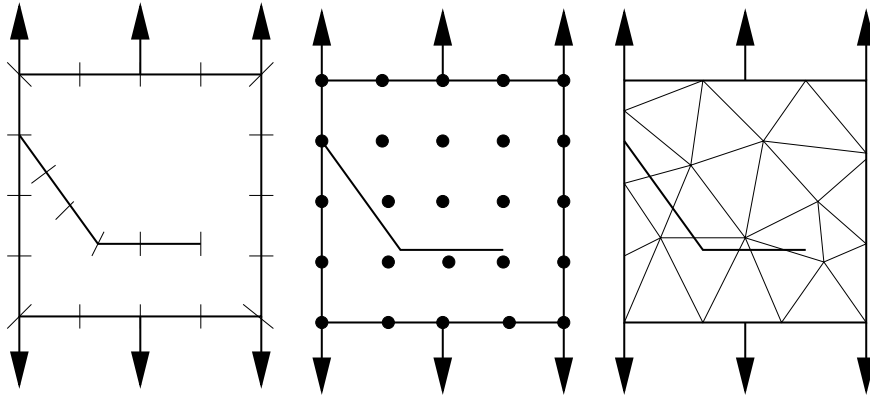


FIG. 1.2 – Trois méthodes numériques pour l'analyse des corps fissurés

**Méthode des éléments de frontière** Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis une vingtaine d'années, elle présente pour principale caractéristique de ne demander qu'une discrétisation de la frontière du domaine et non de l'intérieur. Le travail de remaillage entre chaque étape est donc minime puisqu'il suffit d'ajouter un ou quelques éléments sur les incréments de fissure. Dans cette méthode, les équations aux dérivées partielles sont transformées en des équations intégrales sur la frontière par le biais d'une certaine solution fondamentale de ces équations aux dérivées partielles, dite solution de Green. Cette méthode n'est applicable que si une telle solution existe, ce qui n'est pas le cas des problèmes élasto-plastiques. Pour ces problèmes, un maillage de la zone plastifiée est nécessaire, ce qui fait perdre une grande partie des avantages de la méthode. Les articles sur ce sujet sont nombreux, comme par exemples Portela, Aliabadi et Rooke (1991) et Yan et Nguyen-Dang (1995) pour la fissuration à deux dimensions et Mi et Aliabadi (1993) à trois dimensions.

**Méthode sans maillage** Appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1994, cette méthode est plus proche de la méthode des éléments finis que la méthode précédente. Elle se base sur la résolution de la forme faible des équations aux dérivées partielles par une méthode de Galerkin comme en éléments finis mais par contre l'approximation du champ de déplacement qui est construite pour être introduite dans la forme faible ne nécessite pas de maillage. Seul un ensemble de nœuds est réparti dans le domaine et l'approximation du champ de déplacement en un point ne dépend que de la distance de ce point par rapport aux nœuds qui l'entourent et non de l'appartenance à un certain élément fini. En mécanique de la rupture, la fissure se propage parmi cet ensemble de nœuds et la présence d'une fissure est simplement prise en compte en diminuant le poids que possède un nœud sur l'approximation du déplacement en un certain point si la ligne joignant ce nœud et ce point est coupée par la fissure.

**Méthode des éléments finis étendue** Plus connue sous le sigle XFEM (pour eXtended Finite Element Method) et parfois appelée méthode des éléments finis généralisée, elle est appliquée aux problèmes de mécanique de la rupture depuis 1999. Elle se base sur la méthode des éléments finis avec un maillage normal en remplaçant les éléments qui sont coupés par une fissure par des

éléments spéciaux possédant quelques degrés de liberté supplémentaires qui permettent de représenter un champ de déplacement discontinu de part et d'autre de celle-ci. La propagation est simulée en remplaçant les éléments nouvellement traversés par une fissure par un élément spécial. Moës, Dolbow et Belytschko (1999) présentent la méthode à deux dimensions et Moës, Gravouil et Belytschko (2002) et Gravouil, Moës et Belytschko (2002) présentent la méthode à trois dimensions.

Cette thèse a pour objet la deuxième de ces méthodes : la méthode sans maillage.

## 1.2 Historique

### 1.2.1 Les différentes méthodes sans maillage

De nombreuses branches forment la famille des méthodes sans maillage. Elle est liée à la méthode *smoothed particle hydrodynamics* de Lucy (1977) qui simule des phénomènes astrophysiques comme des explosions d'étoiles par un ensemble de particules. Mais, le tronc commun aux différentes méthodes actuelles est la méthode des éléments diffus de Nayroles, Touzot et Villon (1992) qui utilise une fonction de base et un ensemble de nœuds possédant chacun un certain poids pour former une approximation du champ de déplacement puis surtout la méthode *element-free Galerkin* de Belytschko, Lu et Gu (1994) qui reconnaît dans l'approximation précédente l'approximation au sens des moindres carrés mobiles (MLSA pour *moving least squares approximation*) de Lancaster et Salkauskas (1981). Depuis, les méthodes sans maillage (*meshless methods* ou *meshfree methods*) se développent sous différentes formes et différents noms que nous citons pour référence : *reproducing kernel particle method* de Liu, Jun et Zhang (1995), *particle-in-cell method* de Sulsky, Zhou et Schreyer (1995), *hp-clouds method* de Duarte et Oden (1996b), *partition of unity finite element method* de Melenk et Babuška (1996), *finite point method* de Oñate *et al.* (1996), *free-mesh method* de Yagawa et Yamada (1996), *boundary node method* de Mukherjee et Mukherjee (1997), *local boundary integral equation method* de Zhu, Zhang et Atluri (1998), *meshless local Petrov-Galerkin method* de Atluri et Zhu (1998), *node-by-node meshless method* de Nagashima (1999), *method of finite spheres* de De et Bathe (2000), *point-interpolation method* de Liu et Gu (2001), *finite cloud method* de Aluru et Li (2001), *meshless finite element method* de Idelsohn *et al.* (2003), *least-squares meshfree method* de Kwon *et al.* (2003).

Comme on le voit, la dénomination est encore confuse. Les appellations les plus courantes de nos jours sont celle de la méthode originale de l'école Belytschko (*element-free Galerkin method*) ou plus simplement *meshless method* qui désigne généralement au singulier cette méthode originale et au pluriel la famille des méthodes qui lui sont liées. C'est cet usage que nous suivons en français : la méthode que nous utilisons et que nous appelons la méthode sans maillage est la méthode *element-free Galerkin* originale de Belytschko et nous utilisons le pluriel si nous englobons toute la famille.

## 1.2.2 La méthode sans maillage en mécanique de la rupture

Dans cette section, nous donnons l'ensemble des articles parus à notre connaissance dans les revues scientifiques internationales sur l'application d'une méthode sans maillage pour la simulation de la fissuration.

**Articles de l'équipe du professeur Belytschko** La première utilisation de la méthode sans maillage en mécanique de la rupture à deux dimensions remonte à l'article de Belytschko, Gu et Lu (1994) pour les problèmes de fissuration quasi-statique. Ensuite, Belytschko, Lu et Gu (1995) l'appliquent aux problèmes de fissuration par fatigue puis Belytschko *et al.* (1995), Lu, Belytschko et Tabbara (1995) et Belytschko et Tabbara (1996) aux problèmes de fissuration dynamique. La méthode numérique est améliorée dans Belytschko, Organ et Krongauz (1996) pour la coupler à la méthode des éléments finis afin de limiter la zone sans maillage à une zone proche de la fissure puis dans Organ *et al.* (1996) pour assurer la continuité du champ de déplacement. Un long article par Belytschko *et al.* (1996b) fait la synthèse de la plupart des premiers développements de cette équipe. La méthode est enrichie dans l'article de Fleming *et al.* (1997) pour garantir une bonne représentation de la singularité des contraintes au front de fissure. Dans Ponthot et Belytschko (1998), une formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne (ALE) est proposée pour déplacer les nœuds supplémentaires placés au front de la fissure pour augmenter la précision lorsque celle-ci se propage dans des conditions dynamiques. Belytschko, Organ et Gerlach (2000) appliquent la méthode à la fissuration du béton. Ventura, Xu et Belytschko (2002) représentent la fissure par la méthode dite *level set* plutôt que par une ligne brisée. Les deux seuls articles sur la fissuration tridimensionnelle sont également issus de cette école. Sukumar *et al.* (1997) l'étudient pour des fissures planes et Krysl et Belytschko (1999) le font pour des fissures quelconques.

**Autres articles** Tabbara et Stone (1998) utilisent une méthode sans maillage pour simuler la rupture quasi-statique. Xu et Saigal étudient la fissuration en milieu élastique (1998a) et élasto-plastique (1998b). Rao et Rahman (2000, 2001, 2002a,b, 2004) présentent dans l'ordre une méthode semblable aux articles précédents, une méthode couplée à la méthode des éléments finis et utilisent leur méthode en mécanique de la rupture probabiliste d'une part et non-linéaire d'autre part. Lee, Chung et Choi (2003) utilisent une méthode adaptative qui ajoute des nœuds au front de la fissure en fonction d'un estimateur d'erreur pour représenter précisément la singularité des contraintes. Lee et Yoon (2003) s'attellent à ce problème de singularité en enrichissant l'approximation du déplacement de manière explicite alors que dans Duflot et Nguyen-Dang (2002b, 2004a,c), nous présentons une nouvelle technique d'enrichissement qui porte sur les fonctions poids que nous appliquons aux corps multi-fissurés. Enfin, Chen *et al.* (2004) utilisent une méthode sans maillage en plasticité et montrent une application pour la propagation d'une fissure. Tous les articles de ce paragraphe se rapportent à des problèmes bidimensionnels.

### 1.3 Aperçu de la thèse

Le plan de cette thèse est le suivant. Au chapitre 2, le modèle physique de la mécanique linéaire de la rupture est présenté. Les concepts de modes de rupture, facteurs d'intensité de contrainte, taux de restitution d'énergie, intégrale  $J$ , taux de croissance d'une fissure par fatigue sont introduits et les champs de déplacement et de contrainte en front de fissure sont établis. Au chapitre 3, le modèle numérique de la méthode sans maillage est présenté. La construction de l'approximation du champ de déplacement basée sur un ensemble de nœuds et de fonctions poids est détaillée et ses propriétés sont énoncées. Deux aspects particuliers de la méthode sans maillage sont expliqués : l'imposition des conditions aux limites sur le déplacement et l'intégration de la matrice de raideur. Au chapitre 4, le modèle physique et le modèle numérique se rejoignent avec l'explication de la méthode sans maillage pour les problèmes de mécanique de la rupture à deux dimensions. C'est dans ce chapitre que se retrouve la contribution la plus originale de cette thèse : l'enrichissement de l'approximation du déplacement par la solution analytique en front de fissure par l'intermédiaire des fonctions poids. Les résultats obtenus pour quelques problèmes à deux dimensions sont présentés au chapitre 5. De la même manière, la méthode sans maillage pour les problèmes de mécanique de la rupture à trois dimensions est expliquée au chapitre 6 et les résultats sont présentés au chapitre 7. Au chapitre 8 apparaît une autre contribution originale qui concerne un sujet séparé du reste de la thèse : l'utilisation de la méthode sans maillage pour approcher la fonction de contrainte d'Airy dans une méthode d'équilibre. Elle permet par analyse duale avec la méthode de déplacement habituelle une estimation globale de l'erreur des solutions obtenues. Les conclusions sont tirées à la suite des résultats à la fin des chapitres 5 pour la mécanique de la rupture à deux dimensions, 7 pour la mécanique de la rupture à trois dimensions et 8 pour l'analyse duale et répétées dans les conclusions générales au chapitre 9 où les perspectives de travaux futurs sont ouvertes.



# Chapitre 2

## Mécanique linéaire de la rupture

Comme expliqué dans l'introduction, l'objet de cette thèse est la simulation de la propagation par fatigue de fissures dans des matériaux élastiques linéaires, sans effet dynamique, aussi bien à deux qu'à trois dimensions. Ce chapitre décrit le modèle physique. Nous débutons à la section 2.1 par rappeler les équations de l'élastostatique sous leurs formes indicielle, tensorielle et de tableau que nous utiliserons alternativement par la suite. Ensuite, à la section 2.2, nous expliquons, dans le cadre de la mécanique de la rupture statique à deux dimensions, les concepts de facteurs d'intensité de contrainte et d'intégrale  $J$ . À la section 2.3, nous donnons la loi d'évolution d'une fissure soumise à une charge alternée. Enfin, à la section 2.4, nous généralisons la théorie des deux sections précédentes à trois dimensions.

Nos références principales sont Broek (1974), Meguid (1989) et Anderson (1991).

### 2.1 Élastostatique

Nous considérons la déformation statique d'un corps élastique linéaire, homogène et isotrope qui subit des petites déformations et des petits déplacements. Il occupe un domaine  $\Omega$  dont nous notons la frontière  $\Gamma$ . Il est soumis aux forces volumiques  $\bar{\mathbf{b}}$  dans  $\Omega$ , aux tractions de surface  $\bar{\mathbf{t}}$  sur  $\Gamma_t$  et le déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  est imposé sur  $\Gamma_u$ . (avec  $\Gamma_t \cap \Gamma_u = \emptyset$  et  $\Gamma_t \cup \Gamma_u = \Gamma$ ). Les grandeurs à déterminer pour résoudre ce type de problème sont le champ vectoriel de déplacement  $\mathbf{u}$ , le champ tensoriel symétrique de déformation de Green-Lagrange  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et le champ tensoriel symétrique de contrainte de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ . Les équations aux dérivées partielles qui relient ces grandeurs dans ce type de problème sont, sous forme indicielle,

1. les relations de compatibilité

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (2.2)$$

2. les relations constitutives

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad \text{dans } \Omega \quad (2.3)$$

## 3. les équations d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} + \bar{b}_i = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \text{ sur } \Gamma_t \quad (2.5)$$

Dans ces équations, les indices  $i$  et  $j$  varient de 1 à 3, la dérivée partielle par rapport à la coordonnée  $x_j$  est notée  $_{,j}$ ,  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$  et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ ), la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés est utilisée et  $n_j$  est la composante  $j$  de la normale extérieure à la frontière. Finalement, deux grandeurs caractéristiques du matériau interviennent : le module de Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$ . Une troisième grandeur caractéristique du matériau liée aux deux précédentes est souvent utile : le module de cisaillement  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ .

Si le déplacement et les déformations sont nuls dans la direction  $x_3$ , on se trouve en état plan de déformation. Les équations qui gouvernent ces problèmes sont les 5 mêmes équations que ci-dessus où les indices varient de 1 à 2 et où les champs ne dépendent pas de  $x_3$ . En outre,  $\varepsilon_{i3} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ ,  $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$ .

Si les contraintes sont nulles dans la direction  $x_3$ , on se trouve en état plan de contrainte. Les équations qui gouvernent ces problèmes sont toujours les 5 mêmes équations que ci-dessus où les indices varient de 1 à 2 et où les champs ne dépendent pas de  $x_3$ . En outre,  $\sigma_{i3} = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0$ ,  $\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$ . À cause de cette dernière relation, l'équation (2.3) devient

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.6)$$

où la somme sur l'indice répété  $k$  se fait sur 1, 2.

À 2 ou 3 dimensions, les équations précédentes s'expriment sous forme tensorielle entre le vecteur déplacement  $\mathbf{u}$ , le tenseur d'ordre 2 des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et le tenseur d'ordre 2 des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$  par

## 1. les relations de compatibilité

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla_s \mathbf{u}^T \text{ dans } \Omega \quad (2.7)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ sur } \Gamma_u \quad (2.8)$$

où  $\nabla_s \mathbf{u}^T$  est la partie symétrique de  $\nabla \mathbf{u}^T$ ,

## 2. les relations constitutives

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \text{ dans } \Omega \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{D}$  est le tenseur d'ordre 4 de Hooke et où  $:$  est le symbole du double produit scalaire

## 3. les équations d'équilibre

$$\nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.10)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ sur } \Gamma_t \quad (2.11)$$

Enfin, sous forme de tableau, ces équations deviennent

1. les relations de compatibilité

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{\nabla}] \{\mathbf{u}\} \text{ dans } \Omega \quad (2.12)$$

$$\{\mathbf{u}\} = \{\bar{\mathbf{u}}\} \text{ sur } \Gamma_u \quad (2.13)$$

2. les relations constitutives

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \text{ dans } \Omega \quad (2.14)$$

3. les équations d'équilibre

$$[\mathbf{\nabla}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\bar{\mathbf{b}}\} = 0 \text{ dans } \Omega \quad (2.15)$$

$$[\mathbf{N}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} = \{\bar{\mathbf{t}}\} \text{ sur } \Gamma_t \quad (2.16)$$

avec les définitions suivantes

– à 2 dimensions,

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}, \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}, \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$[\mathbf{\nabla}] = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 \\ 0 & \partial_y \\ \partial_y & \partial_x \end{pmatrix}, [\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

et en état plan de déformation

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

alors qu'en état plan de contrainte

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

– à 3 dimensions

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}, \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{pmatrix}, \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$[\mathbf{\nabla}] = \begin{pmatrix} \partial_x & 0 & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \partial_z \\ \partial_y & \partial_x & 0 \\ \partial_z & 0 & \partial_x \\ 0 & \partial_z & \partial_y \end{pmatrix}, [\mathbf{N}] = \begin{pmatrix} n_x & 0 & 0 \\ 0 & n_y & 0 \\ 0 & 0 & n_z \\ n_y & n_x & 0 \\ n_z & 0 & n_x \\ 0 & n_z & n_y \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

où nous avons préféré la notation, dite « de l'ingénieur », avec des indices  $x, y, z$  plutôt que 1, 2, 3 :  $\varepsilon_x = \varepsilon_{11}$ ,  $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$ ,  $\sigma_x = \sigma_{11}$ ,  $\tau_{xy} = \sigma_{12}$ , etc.

En état plan, dans le cas où les forces de volume dérivent d'un potentiel  $\bar{V}$

$$\bar{b}_x = -\bar{V}_{,x} \text{ et } \bar{b}_y = -\bar{V}_{,y} \quad (2.24)$$

il est parfois utile de trouver la solution en recherchant une fonction  $\psi$ , appelée fonction de contrainte d'Airy, qui est telle que

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{,yy} + \bar{V} \\ \psi_{,xx} + \bar{V} \\ -\psi_{,xy} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

parce que les équations d'équilibre en volume sont alors automatiquement vérifiées. Nous utiliserons des fonctions de contrainte d'Airy aux sections 2.2.2 et 8.2.2.

## 2.2 Analyse élastique linéaire des corps fissurés bidimensionnels

Comme dans la section précédente, nous considérons un corps élastique linéaire, homogène et isotrope qui subit des petites déformations et des petits déplacements. Ce corps est fissuré. Dans cette section, nous nous limitons au cas bidimensionnel où la fissure présente dans le corps est représentée par une courbe. Pour cette étude, nous plaçons un repère dont l'origine se trouve sur la pointe de la fissure avec l'axe  $x$  dans le prolongement de la fissure, l'axe  $y$  perpendiculaire à  $x$  dans le plan et l'axe  $z$  hors du plan. Dans la section 2.4, nous généraliserons au cas tridimensionnel où la fissure est représentée par une surface.

### 2.2.1 Modes fondamentaux de rupture et facteurs d'intensité de contrainte

Nous nous intéressons au champ de contrainte au voisinage du front de fissure. Ces contraintes dépendent de la longueur de la fissure, des forces appliquées et de la configuration géométrique. Dans l'hypothèse d'un matériau élastique, les contraintes sont infinies au front de fissure. Irwin (1957), en s'appuyant sur les travaux de pionnier de Griffith (1920), a plus précisément montré que les contraintes au voisinage du front de fissure ont la forme

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + \sigma_{ij}^0 + O(\sqrt{r}) \quad (2.26)$$

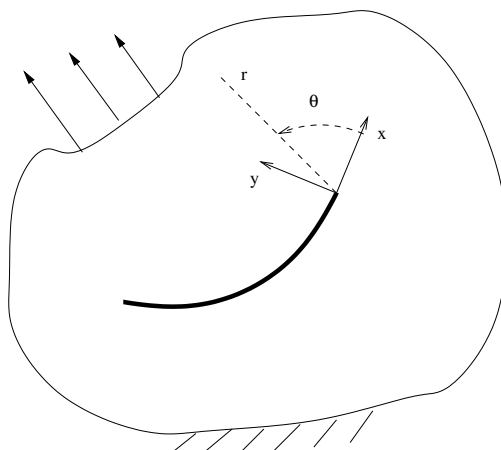


FIG. 2.1 – Corps fissuré et repère en front de fissure

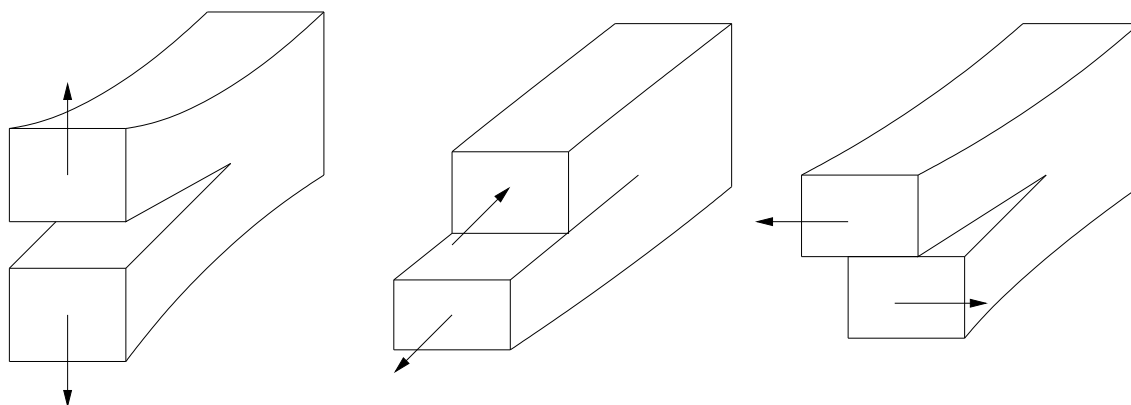


FIG. 2.2 – Les trois modes fondamentaux

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires locales :  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Les fonctions  $f_{ij}$  sont des fonctions connues qui sont détaillées plus bas et  $\sigma_{ij}^0$  sont les contraintes finies au front de fissure. Les trois grandeurs importantes de l'équation (2.26) sont  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  : ce sont les *facteurs d'intensité de contrainte* qui correspondent aux trois modes de base de déplacement relatif des lèvres de la fissure. Ils dépendent de la longueur de la fissure, de la géométrie et des charges appliquées. Ils déterminent à eux seuls les champs asymptotiques de contrainte et de déplacement. Pour cette raison, ce sont ces facteurs qui interviendront dans les critères de fissuration.

Les 3 modes fondamentaux sont les suivants (figure 2.2) :

**mode I** Mode d'ouverture où les lèvres de la fissure s'écartent l'une de l'autre selon la direction  $y$ , qui apparaît lors d'un chargement en tension  $\sigma_y$ . Le facteur d'intensité de contrainte du mode I est défini par

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_y(r, 0, 0) \quad (2.27)$$

En cas de compression, il ne peut être négatif car cela signifierait que les lèvres se pénètrent et il faut alors tenir compte du contact entre les lèvres.

**mode II** Mode de glissement où les lèvres glissent l'une sur l'autre selon la direction perpendiculaire au front de fissure  $x$ , qui apparaît lors d'un cisaillement  $\tau_{xy}$ .

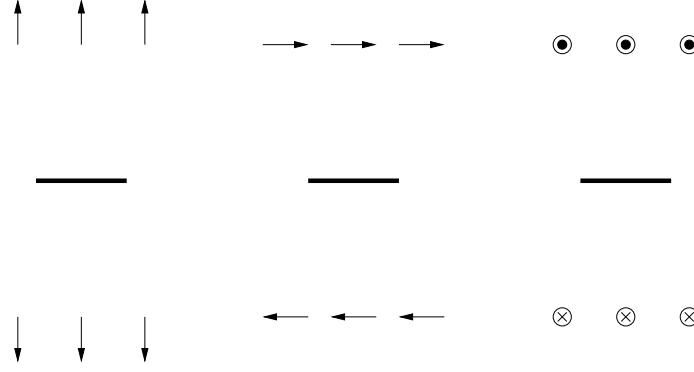


FIG. 2.3 – Fissure dans une plaque infinie soumise aux trois sollicitations

Le facteur d'intensité de contrainte du mode II est défini par

$$K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{xy}(r, 0, 0) \quad (2.28)$$

**mode III** Mode de déchirement où les lèvres se déplacent l'une par rapport à l'autre selon la direction parallèle au front de fissure  $z$ , qui apparaît lors d'un cisaillement  $\tau_{yz}$ . Le facteur d'intensité de contrainte du mode III est défini par

$$K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \tau_{yz}(r, 0, 0) \quad (2.29)$$

La superposition de ces 3 modes est suffisante pour décrire le cas le plus général de déplacement des lèvres de la fissure.

## 2.2.2 Équation des champs de contrainte et de déplacement en front de fissure

Nous nous intéressons aux champs de contrainte et de déplacement dans un milieu bidimensionnel infini qui possède une fissure de longueur  $2a$  et qui est soumis tour à tour aux 3 sollicitations des modes fondamentaux à l'infini en l'absence de force de volume. Voir figure 2.3.

### Mode d'ouverture

Les contraintes sont obtenues à partir d'une fonction de contrainte d'Airy. Westergaard (1939) a montré qu'il est approprié d'exprimer celle-ci à partir d'une certaine fonction  $W_I$  de la variable complexe  $Z = X + iY$  dont l'origine se trouve au milieu de la fissure :

$$\psi_I = \Re \overline{W_I} + Y \Im \overline{W_I} \quad (2.30)$$

où  $\overline{W_I}$  est le conjugué de  $W_I$ . En introduisant cette expression dans l'équation (2.25), nous obtenons les contraintes suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_X &= \Re W_I - Y \Im W_I' \\ \sigma_Y &= \Re W_I + Y \Im W_I' \\ \tau_{XY} &= -Y \Re W_I' \end{aligned} \quad (2.31)$$

où  $W'_I = \frac{dW_I}{dZ}$ . Toujours selon Westergaard, c'est la fonction

$$W_I = \frac{\sigma_0 Z}{\sqrt{Z^2 - a^2}} \quad (2.32)$$

qui satisfait les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_Y &= 0 & \text{pour } -a < X < a \\ \sigma_Y &= \sigma_0 & \text{à l'infini} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Les équations (2.31) et (2.32) forment la solution exacte complète pour les contraintes mais le plus intéressant est d'exprimer la solution au voisinage d'un des deux fronts de fissure dans le repère local  $(x, y)$  centré sur une pointe en développant pour  $r \ll a$  après avoir fait le changement de variable  $Z = a + re^{i\theta}$ . Après calcul, nous obtenons

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Comme il a été rappelé au début de la section 2.2, Irwin a montré que la contribution du mode d'ouverture au champ de contrainte en front de fissure a toujours la même distribution géométrique et les fonctions de  $\theta$  de l'équation précédente sont en fait les  $f_{ij}^I(\theta)$  de l'équation (2.26). L'amplitude de la singularité en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  est donné par le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  qui vaut dans le cas présent de la fissure de longueur  $2a$  dans un corps infini soumis à une traction  $\sigma_0$  :

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.35)$$

Les déplacements sont obtenus en intégrant les équations de compatibilité. Par exemple, en état plan de déformation, le déplacement selon  $X$  s'obtient par

$$u_X = \frac{1}{E} \int [(1 - \nu^2) \sigma_X - \nu(1 + \nu) \sigma_Y] dX \quad (2.36)$$

Après substitution des équations (2.31), nous obtenons

$$u_X = \frac{1 + \nu}{E} [(1 - 2\nu) \Re \overline{W_I} - Y \Im W_I] \quad (2.37)$$

De la même manière, selon la direction  $Y$ , nous obtenons

$$u_Y = \frac{1 + \nu}{E} [2(1 - \nu) \Im \overline{W_I} - Y \Re W_I] \quad (2.38)$$

Les équations (2.32), (2.37) et (2.38) forment la solution complète pour les déplacements (à un déplacement en mode rigide près) pour les problèmes en état plan de déformation mais il est ici aussi utile de s'intéresser à l'expression de ce champ au voisinage du front de fissure :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (1 - 2\nu + \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} (2 - 2\nu + \cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

où nous avons utilisé le module de cisaillement  $\mu$ . De la même manière, en état plan de contrainte, le déplacement en front de fissure est donné par

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \left( \frac{2}{1+\nu} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Il est élégant de regrouper les expressions du champ de déplacement en front de fissure en états plans de déformation (2.39) et de contrainte (2.40) en une seule expression

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (\kappa - 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \\ \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 - 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

en introduisant la constante de Kolosov  $\kappa$  définie par

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{en état plan de déformation} \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & \text{en état plan de contrainte} \end{cases} \quad (2.42)$$

Grâce aux expressions des contraintes et déplacements en front de fissure, il est possible de calculer l'énergie de déformation en front de fissure et le taux de restitution de cette énergie quand la fissure croît d'un petit incrément. Après développement, nous obtenons la relation importante entre le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte

$$G_I = \frac{K_I^2}{E^*} \quad (2.43)$$

où  $E^*$  est le module de Young effectif, avec  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$  en état plan de déformation et  $E^* = E$  en état plan de contrainte.

### Mode de glissement

Les contraintes dans le milieu élastique bidimensionnel possédant une fissure de longueur  $2a$  soumis à un cisaillement pur sont obtenues à partir d'une fonction de contrainte d'Airy comme pour le mode d'ouverture. Dans ce cas-ci, nous cherchons la solution en liant la fonction d'Airy à une fonction de Westergaard  $W_{II}$  de variable complexe par

$$\psi_{II} = -Y \Re \overline{W_{II}} \quad (2.44)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (2.25), nous obtenons les contraintes suivantes

$$\begin{aligned} \sigma_X &= 2\Im W_{II} + Y \Re W'_{II} \\ \sigma_Y &= -Y \Re W'_{II} \\ \tau_{XY} &= \Re W_{II} - Y \Im W'_{II} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Selon Westergaard, c'est la fonction

$$W_{II} = \frac{\tau_0 Z}{\sqrt{Z^2 - a^2}} \quad (2.46)$$



qui satisfait les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned}\tau_{XY} &= 0 & \text{pour } -a < x < a \\ \tau_{XY} &= \tau_0 & \text{à l'infini}\end{aligned}\quad (2.47)$$

Au voisinage du front de fissure, le champ de contrainte vaut

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{bmatrix}\quad (2.48)$$

alors que le champ de déplacement vaut

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (\kappa + 1 + 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) \\ \cos \frac{\theta}{2} (-\kappa + 1 + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}) \end{bmatrix}\quad (2.49)$$

Dans le cas de la fissure de longueur  $2a$  dans un corps infini soumis à un cisaillement  $\tau_0$ , le facteur d'intensité de contrainte du mode II vaut :

$$K_{II} = \tau_0 \sqrt{\pi a}\quad (2.50)$$

De manière similaire au mode d'ouverture, nous obtenons la relation suivante entre le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte :

$$G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E^*}\quad (2.51)$$

### Mode de déchirement

Contrairement aux 2 premiers modes, le mode de déchirement n'est pas un problème en état plan de contrainte. Le déplacement se fait exclusivement selon l'axe  $z$  :  $u_x = u_y = 0$ ,  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ . Il reste

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x}\quad (2.52)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y}\quad (2.53)$$

à introduire dans l'équation d'équilibre

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0\quad (2.54)$$

ce qui se réduit à

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \nabla^2 u_z = 0\quad (2.55)$$

Nous cherchons la solution en liant le déplacement  $u_z$  à une fonction de Westergaard  $W_{III}$  de variable complexe par

$$u_z = \frac{1}{\mu} \overline{W_{III}}\quad (2.56)$$

à laquelle sont associées les contraintes

$$\begin{aligned}\tau_{xz} &= \Im W'_{III} \\ \tau_{yz} &= \Re W'_{III}\end{aligned}\quad (2.57)$$

Selon Westergaard, c'est la fonction

$$W_{III} = \frac{\tau_0 Z}{\sqrt{Z^2 - a^2}} \quad (2.58)$$

qui satisfait les conditions aux limites suivantes

$$\begin{aligned}\tau_{yz} &= 0 & \text{pour } -a < x < a \\ \tau_{yz} &= \tau_0 & \text{à l'infini}\end{aligned}\quad (2.59)$$

Au voisinage du front de fissure, le champ de contrainte vaut

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

alors que le champ de déplacement vaut

$$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (2.61)$$

Dans le cas de la fissure de longueur  $2a$  dans un corps infini soumis à un cisaillement  $\tau_0$ , le facteur d'intensité de contrainte du mode III vaut :

$$K_{III} = \tau_0 \sqrt{\pi a} \quad (2.62)$$

De manière similaire au mode d'ouverture, nous obtenons la relation suivante entre le taux de restitution d'énergie et le facteur d'intensité de contrainte :

$$G_{III} = \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.63)$$

### Mode mixte

En élasticité linéaire, dans le cas général d'un chargement combiné, les champs de déplacement (2.41), (2.49) et (2.61) d'une part et les champs de contrainte (2.34), (2.48) et (2.60) d'autre part s'additionnent. Par ailleurs, les taux de restitution d'énergie des 3 modes s'additionnent :

$$G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.64)$$

### 2.2.3 Intégrale J

D'importants critères de fissuration en mécanique de la rupture élasto-plastique sont basés sur une certaine *intégrale J* discutée ci-dessous, plutôt que sur les facteurs d'intensité de contrainte comme c'est le cas en mécanique de la rupture élastique. Cela s'explique par le fait que si les facteurs d'intensité de contrainte déterminent à eux seuls les champs de contrainte et de déplacement asymptotiques pour les problèmes élastiques, ce n'est pas le cas pour les problèmes élasto-plastiques où il faut tenir compte de la dissipation plastique dans une zone entourant le front de fissure. Toutefois, dans cette thèse consacrée aux problèmes élastiques, nous allons nous appuyer sur l'intégrale J pour obtenir les facteurs d'intensité de contrainte en vertu de la relation qui lie ces facteurs à l'intégrale J en mécanique de la rupture élastique.

#### Définition et propriétés

Le concept de l'intégrale J a été introduit par Eshelby (1956) et développé par Rice (1968). L'interprétation physique de cette intégrale sur un contour  $\Gamma$  est qu'elle vaut le taux de diminution de l'énergie potentielle stockée dans le domaine entouré par  $\Gamma$  lorsque la fissure croît. Elle est donnée en notation indicielle par

$$J = \int_{\Gamma} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (2.65)$$

où, pour rappel, la fissure est dirigée selon  $x_1$  et où  $W$  est la densité d'énergie de déformation définie par

$$W = \int_{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.66)$$

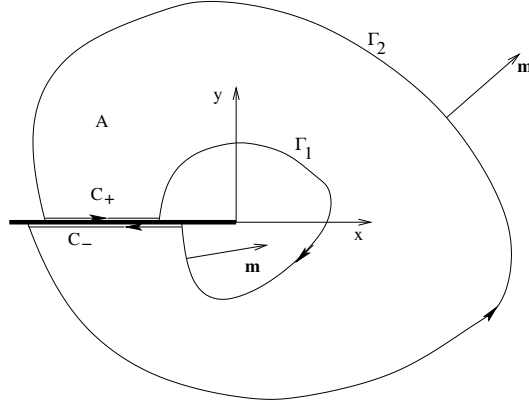
qui se ramène simplement pour les matériaux élastique linéaires à

$$W = \frac{\sigma_{ij} \varepsilon_{ij}}{2} \quad (2.67)$$

Il est aisé de montrer que l'intégrale J est nulle sur tout contour fermé que ce soit pour les matériaux élastiques ou élasto-plastiques, en se basant sur les seules relations de compatibilité et d'équilibre. Nous déduisons de cette propriété l'indépendance de l'intégrale J sur tout contour ouvert entourant la pointe de la fissure avec l'origine du contour sur une lèvre et l'extrémité sur l'autre, à condition

1. que les lèvres de la fissure ne soient pas chargées et
2. que la fissure soit droite selon l'axe  $x_1$  des extrémités du contour choisi à la pointe de la fissure.

Pour prouver cette indépendance, nous considérons le contour fermé  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_{C_-} + \Gamma_2 + \Gamma_{C_+}$  de la figure 2.4 sur lequel l'intégrale J est nulle. L'intégrale J (2.65) est nulle sur  $C_+$  et  $C_-$  car  $\sigma_{ij} n_j = t_i = 0$  par la condition 1 et  $n_1 = 0$  par la condition 2. Il reste  $J_{\Gamma_1} + J_{\Gamma_2} = 0$  et finalement, en considérant un contour  $\Gamma_1'$  identique à  $\Gamma_1$  mais parcouru dans l'autre sens,  $J_{\Gamma_1} = J_{\Gamma_2'}$ . Cette propriété d'indépendance du chemin est importante pour calculer l'intégrale J à partir des champs de contrainte et de déplacement obtenus par une méthode numérique car elle permet d'évaluer

FIG. 2.4 – Intégrale  $J$ 

l'intégrale  $J$  sur un chemin éloigné du front de fissure où les résultats sont plus précis que ceux à proximité du front.

Dans le cas d'un matériau élastique, l'intégrale  $J$  s'identifie au taux de restitution d'énergie. Nous obtenons cette relation entre l'intégrale  $J$  et les facteurs d'intensité de contrainte

$$J = G = \frac{K_I^2}{E^*} + \frac{K_{II}^2}{E^*} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad (2.68)$$

Il est possible de vérifier cette relation sans passer par l'identité avec le taux de restitution d'énergie en introduisant les différents champs asymptotiques de la section 2.2.2 dans l'équation (2.65) et en réalisant l'intégration sur un contour circulaire centré sur la pointe de la fissure.

### Intégrales d'interaction

Nous extrayons les valeurs des trois facteurs d'intensité de contrainte du calcul de l'intégrale  $J$  en utilisant la technique des intégrales d'interaction de Yau, Wang et Corten (1980). Nous considérons deux états d'équilibre du corps fissuré. L'état 1 est l'état réel qui satisfait les conditions aux limites et l'état 2 est un état auxiliaire fictif. L'intégrale  $J$  des deux états superposés est

$$J^{(tot)} = \int_{\Gamma} \left( W^{(tot)} \delta_{1j} - \left( \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \frac{\partial \left( u_i^{(1)} + u_i^{(2)} \right)}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \quad (2.69)$$

où

$$W^{(tot)} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)} \right) \left( \varepsilon_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) \quad (2.70)$$

En réarrangeant les termes, nous obtenons

$$\begin{aligned} J^{(tot)} &= \int_{\Gamma} \left( W^{(1)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma} \left( W^{(2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left( W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_j d\Gamma \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + M^{(1,2)} \end{aligned}$$

où  $J^{(1)}$  et  $J^{(2)}$  sont les intégrales J des états 1 et 2 respectivement.  $M^{(1,2)}$  est l'intégrale d'interaction des 2 états

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left( W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) n_j \, d\Gamma \quad (2.71)$$

où  $W^{(1,2)}$  est l'énergie de déformation mutuelle définie par

$$W^{(1,2)} = \frac{1}{2} \left( \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} + \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \right) \quad (2.72)$$

Nous écrivons la relation (2.68) pour la superposition des états et développons

$$\begin{aligned} J^{(tot)} &= \frac{\left( K_I^{(tot)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{II}^{(tot)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{III}^{(tot)} \right)^2}{2\mu} \\ &= \frac{\left( K_I^{(1)} + K_I^{(2)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{III}^{(1)} + K_{III}^{(2)} \right)^2}{2\mu} \\ &= \frac{\left( K_I^{(1)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{II}^{(1)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{III}^{(1)} \right)^2}{2\mu} + \frac{\left( K_I^{(2)} \right)^2}{E^*} + \frac{\left( K_{II}^{(2)} \right)^2}{E^*} \\ &\quad + \frac{\left( K_{III}^{(2)} \right)^2}{2\mu} + 2 \frac{K_I^{(1)} K_I^{(2)}}{E^*} + 2 \frac{K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}}{E^*} + 2 \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{2\mu} \\ &= J^{(1)} + J^{(2)} + 2 \left( \frac{K_I^{(1)} K_I^{(2)}}{E^*} + \frac{K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}}{E^*} + \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{2\mu} \right) \end{aligned}$$

Finalement, nous obtenons

$$M^{(1,2)} = 2 \left( \frac{K_I^{(1)} K_I^{(2)}}{E^*} + \frac{K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)}}{E^*} + \frac{K_{III}^{(1)} K_{III}^{(2)}}{2\mu} \right) \quad (2.73)$$

où  $M^{(1,2)}$  est obtenu par (2.71). Les trois facteurs d'intensité de contrainte de l'état réel s'obtiennent en évaluant l'intégrale d'interaction entre l'état réel et trois états auxiliaires successifs judicieusement choisis. Nous choisissons les trois états des modes purs asymptotiques de la section 2.2.2. Par exemple, si l'état auxiliaire est celui du mode I pur avec  $K_I^{(2)} = 1$ ,  $K_{II}^{(2)} = 0$  et  $K_{III}^{(2)} = 0$ , le facteur d'intensité de contrainte du mode I de l'état réel s'obtient directement :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} M^{(1, \text{mode I pur})} \quad (2.74)$$

### Intégrale J évaluée sur un domaine

Il est souvent souhaitable d'utiliser une forme d'intégrale sur le domaine intérieur à une courbe plutôt que sur la courbe elle-même pour évaluer l'intégrale J à partir des champs de contrainte et de déplacement obtenus par une méthode numérique. De cette manière, les oscillations parasites qui affectent cette solution numérique se

trouvent lissées et généralement la précision et l'indépendance de l'intégrale  $J$  de la solution estimée augmentent. Cette technique est due à Moran et Shih (1987).

Nous considérons une certaine intégrale sur le contour fermé de la figure 2.4 où l'intégrande est celui de l'intégrale de l'équation (2.65) pondéré par une fonction  $q$

$$I = \int_{\Gamma} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j q \, d\Gamma \quad (2.75)$$

où  $\mathbf{m}$  est la normale extérieure au contour fermé qui vaut  $\mathbf{n}$  sur  $\Gamma_2$  et  $-\mathbf{n}$  sur  $\Gamma_1$ . La fonction  $q$  est choisie telle que

$$q = \begin{cases} 1 & \text{sur } \Gamma_1 \\ 0 & \text{sur } \Gamma_2 \\ \text{arbitraire} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.76)$$

D'une part, puisque  $q = 0$  sur  $\Gamma_2$  et que l'intégrande est nul sur  $C_+$  et  $C_-$ , l'intégrale sur le contour fermé se réduit à une intégrale sur  $\Gamma_1$

$$I = \int_{\Gamma_1} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) m_j \, d\Gamma = -J \quad (2.77)$$

D'autre part, par le théorème de la divergence,

$$I = \int_A \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) q + \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \right] \, dA \quad (2.78)$$

On peut facilement montrer que le premier terme de l'intégrande est nul en élasticité linéaire et par conséquent, la forme en domaine de l'intégrale  $J$  est

$$J = - \int_A \left( W \delta_{1j} - \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \, dA \quad (2.79)$$

De la même manière, l'intégrale d'interaction évaluée sur un domaine est donnée par

$$M^{(1,2)} = - \int_A \left( W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} \, dA \quad (2.80)$$

## 2.3 Fissuration par fatigue

La fatigue est une des formes de propagation de fissures dans un matériau. Elle se rapporte à la fissuration lente sous des conditions de chargement cyclique où les effets dynamiques sont négligés. La fissuration par fatigue se déroule généralement en trois phases, qui sont illustrées sur la figure 2.5 :

**Initiation** À partir de défauts comme des vides ou des inclusions se forment des micro-fissures qui finissent par se rejoindre pour former une ou plusieurs macro-fissures dominantes.

**Propagation** Sous l'effet de la charge alternée entre  $\sigma_{\min}$  et  $\sigma_{\max}$ , cette ou ces quelques macro-fissures se propagent lentement.

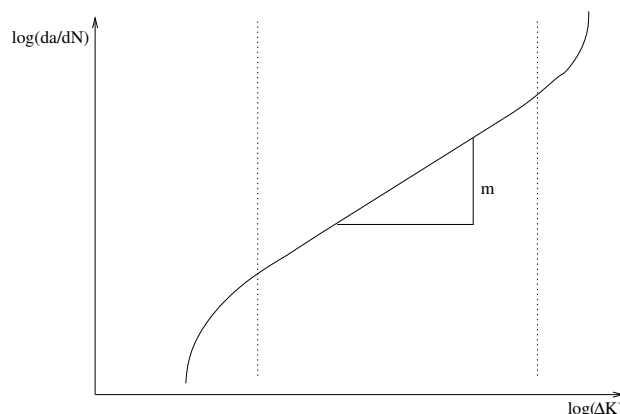


FIG. 2.5 – Taux d’accroissement d’une fissure en fonction de l’écart entre les facteurs d’intensité de contrainte extrêmes d’un cycle de charge cyclique

**Ruine** Quand une des fissures atteint une taille telle que le facteur d’intensité de contrainte  $K_{\max}$  correspondant à la charge maximale  $\sigma_{\max}$  vaut une certaine valeur  $K_c$  caractéristique du matériau appelée *ténacité*, cette fissure se propage rapidement en quelques cycles.

Dans cette thèse, nous n’étudions pas la phase d’initiation qui se simule par des méthodes numériques différentes et indépendantes des méthodes que nous allons mettre en œuvre pour simuler la propagation des fissures jusqu’à la ruine. Nous nous attachons essentiellement à déterminer le nombre de cycles de charge nécessaires pour qu’une macro-fissure repérée dans une structure mécanique et dont la taille initiale est mesurée se propage jusqu’à atteindre la taille critique où la ruine se produit. Cette étude se base sur la loi empirique de Paris et Erdogan (1963) qui relie le taux d’extension de la fissure par cycle à l’amplitude de la variation du facteur d’intensité de contrainte pour un mode I pur :

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K)^m \quad (2.81)$$

Dans cette formule,  $a$  est la longueur de la fissure,  $N$  est le nombre de cycles de charge,  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ .  $C$  et  $m$  sont des valeurs caractéristiques du matériau, qui peuvent aussi dépendre de l’environnement — elles augmentent en milieu corrosif par exemple. Il existe plusieurs variantes à cette formule pour tenir compte de la plastification en front de fissure, de l’amplitude variable de la sollicitation, de la charge moyenne, etc.

En connaissant le facteur d’intensité de contrainte (qui varie en fonction de la longueur  $a$ ) tout au long de la croissance, nous déterminons le nombre de cycles à partir du moment où une fissure de longueur  $a_0$  est repérée jusqu’à la ruine en intégrant la loi de Paris

$$N_c = \int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{C (\Delta K)^m} \quad (2.82)$$

Dans des conditions différentes qu’un pur mode I, il s’agit de déterminer la direction que suit la propagation de la fissure et le taux de croissance de cette propagation à l’aide d’un facteur d’intensité de contrainte équivalent à une propagation dans cette

direction qui sera introduit dans la loi de Paris (2.81). Il existe trois critères courants pour prédire la direction de propagation :

**Maximum de la contrainte principale** (Erdogan et Shih (1963)) Ce critère postule que la propagation prend place dans une des deux directions principales du tenseur du champ de contrainte en front de fissure, qui est celle où la traction est maximale.

**Restitution d'énergie maximale** (Nuismer (1975)) Ce critère postule que la propagation prend place dans la direction qui est telle que la restitution d'énergie pour un incrément de fissure est maximale. Il est prouvé que la direction prédite par ce critère est la même que pour le critère précédent dans le cadre où nous nous sommes placés des problèmes de mécanique de la rupture élastique linéaire.

**Minimum de l'énergie de déformation** (Sih (1974)) Ce critère postule que la propagation prend place dans la direction où l'énergie de déformation est la plus faible.

Dans cette thèse, nous utilisons le premier critère. Nous allons dans un premier temps raisonner en état plan où seuls les modes I et II sont présents pour établir la direction de propagation et le facteur d'intensité de contrainte équivalent puis ajouterons le mode III dont on peut prouver par symétrie qu'il n'influence pas la direction de propagation. Exprimons le tenseur de contrainte en front de fissure des modes I (2.34) et II (2.48) superposés en coordonnées polaires :

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) + K_{II} \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2}\right) \\ K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ \frac{1}{2} K_I \sin \theta + \frac{1}{2} K_{II} (3 \cos \theta - 1) \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Les directions principales sont celles pour lesquelles  $\tau_{r\theta} = 0$ , soit

$$K_I \sin \theta_p + K_{II} (3 \cos \theta_p - 1) = 0 \quad (2.84)$$

qui donne après des manipulations trigonométriques l'angle de propagation suivant

$$\theta_p = 2 \arctan \left( \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right) \quad (2.85)$$

Dans cette direction,  $\sigma_\theta$  agit comme un pur mode I. On en déduit un facteur d'intensité de contrainte d'un pur mode I équivalent en égalant le champ réel  $\sigma_\theta$  selon  $\theta_p$  au champ  $\sigma_y$  équivalent dans le prolongement de la fissure :

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_p}{2} \left[ K_I \cos^2 \frac{\theta_p}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_p \right] = \frac{K_{eq}}{\sqrt{2\pi r}} \quad (2.86)$$

soit

$$K_{eq} = K_I \cos^3 \frac{\theta_p}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_p}{2} \sin \frac{\theta_p}{2} \quad (2.87)$$

C'est ce facteur équivalent qui intervient dans la loi de Paris pour la propagation de fissures par fatigue en mode mixte

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_{eq})^m \quad (2.88)$$



et pour le critère de stabilité avant la ruine

$$K_{\text{eq,max}} \leq K_c \quad (2.89)$$

En présence d'un mode III, la direction de propagation reste donnée par l'équation (2.85) et on admet que le facteur d'intensité de contrainte équivalent est augmenté d'une contribution telle que le taux de restitution d'énergie du mode I équivalent vaut le taux de restitution d'énergie réel :

$$K_{\text{eq}} = \sqrt{\left( K_I \cos^3 \frac{\theta_p}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_p}{2} \sin \frac{\theta_p}{2} \right)^2 + \frac{E^*}{2\mu} K_{III}^2} \quad (2.90)$$

## 2.4 Analyse élastique linéaire des corps fissurés tridimensionnels

Les problèmes de fissuration à 3 dimensions, où la fissure est représentée par une surface, sont bien plus complexes que les problèmes à 2 dimensions. Alors que les problèmes de propagation des fissures planes sollicitées seulement en ouverture et qui croissent donc dans leur plan sont bien connus, il n'existe pas encore de nos jours de théorie largement acceptée pour la croissance des fissures gauches. Le modèle le plus répandu consiste à traiter l'extension de la fissure à 3 dimensions en appliquant la théorie à 2 dimensions en état plan de déformation dans chaque plan normal au front de fissure. Cela suppose que les facteurs d'intensité de contrainte ne sont plus des valeurs uniques définies à la pointe de la fissure comme à 2 dimensions mais varient le long du front. En chaque point du front, nous plaçons un repère local avec l'axe  $x$  selon la normale au front, l'axe  $y$  selon la binormale et l'axe  $z$  selon la tangente, la fissure se trouvant du côté des  $x$  négatifs (figure 2.6). Nous admettons que les champs de contrainte et de déplacement asymptotiques dans le plan normal au front passant par le point considéré sont donnés par les formules de la section 2.2.1. Cette hypothèse nous permet d'évaluer les facteurs d'intensité de contrainte en un point du front en calculant les intégrales  $J$  d'interaction par intégration sur une courbe pour la forme (2.71) ou une surface pour la forme (2.80) contenus dans le plan normal associé à ce point.

La croissance de la fissure est représentée par les surfaces successives que nous formons en suivant le front de fissure. Celui-ci progresse en déplaçant chaque point selon les lois de la théorie bidimensionnelle dans le plan normal qui lui est associé. Ainsi, lors d'une fissuration par fatigue, pour chaque incrément du nombre de cycles  $dN$ , chaque point du front se déplace dans le plan normal dans une direction  $\theta_p$  donnée par l'équation (2.85) d'un incrément  $da$  qui est donné par l'équation (2.88). Comme les facteurs d'intensité de contrainte varient le long du front, il est clair que la direction  $\theta_p$ , le facteur d'intensité de contrainte équivalent  $K_{\text{eq}}$  et l'incrément  $da$  qui en dépend varient eux aussi le long du front. La ruine est atteinte quand  $K_{\text{eq,max}}$  dépasse la ténacité  $K_c$  en un point quelconque du front de fissure.

Il existe plusieurs hypothèses pour le choix du module de Young effectif  $E^*$ . Nous admettons l'hypothèse  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$  comme en état plan de déformation. Une autre

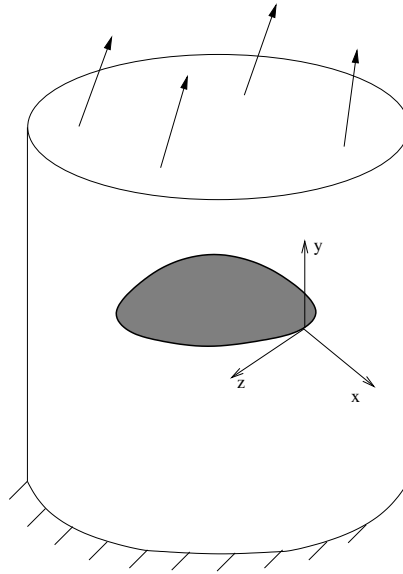


FIG. 2.6 – Corps fissuré et repère en front de fissure à trois dimensions

hypothèse due à Cherepanov (1979) postule

$$E^* = E \left( \frac{1}{1 - \nu^2} + \frac{\nu}{1 + \nu} \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x + \varepsilon_y} \right) \quad (2.91)$$

qui a l'avantage de donner  $E^* = E$  si  $\varepsilon_z = 0$  (état plan de déformation) et  $E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}$  si  $\varepsilon_z = \varepsilon_x + \varepsilon_y$  (état plan de contrainte) mais qui se base sur des valeurs locales des déformations, qui sont peu précises lors de simulations numériques.

# Chapitre 3

## Méthode sans maillage

La méthode exposée ci-dessous est dite sans maillage car elle ne demande qu'un ensemble de nœuds et une description de la frontière pour construire une solution approchée. Cette opposition entre la méthode sans maillage et la méthode des éléments finis est schématisée sur la figure 3.1. Dans cette dernière, il faut découper le domaine en éléments. La valeur d'une certaine fonction approchée en un point du domaine dépend de l'élément auquel ce point appartient par interpolation entre les valeurs de la fonction aux nœuds qui appartiennent à cet élément. Dans la méthode sans maillage, on associe à chaque nœud une fonction poids, non-nulle sur un petit domaine appelé domaine d'influence. La valeur de la fonction approchée en un point dépend des nœuds dont le domaine d'influence comprend le point par approximation à partir des valeurs de la fonction aux nœuds par une technique appelée l'approximation au sens des moindres carrés mobiles (ou *moving least squares approximation*, approximation MLS). Nous débutons ce chapitre à la section 3.1 par décrire cette approximation MLS et par en donner les propriétés. Ensuite, à la section 3.2, nous l'utilisons pour approximer le champ de déplacement que nous introduisons, tout comme dans la méthode des éléments finis, dans la forme faible des équations de l'élasticité pour déterminer la valeur des inconnues nodales. Deux aspects particuliers de la méthode sans maillage sont abordés par la suite : l'imposition des conditions aux limites sur le déplacement à la section 3.3 et l'intégration sur le domaine à la section 3.4. Une méthode particulière d'intégration est expliquée à la section 3.5. Nous faisons un résumé de la méthode à la section 3.6.

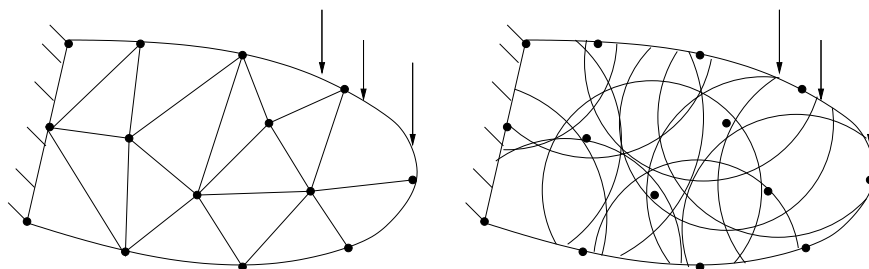


FIG. 3.1 – Méthode des éléments finis et méthode sans maillage

## 3.1 Approximation au sens des moindres carrés mobiles

Nous débutons cette section par un rappel au sujet de l'approximation classique au sens des moindres carrés qui permet d'expliquer plus aisément l'approximation au sens des moindres carrés *mobiles* (MLS) introduite par Lancaster et Salkauskas (1981). Ensuite, nous énonçons ses propriétés puis indiquons nos choix pour différents paramètres qui interviennent dans sa définition. Enfin, nous décrivons les algorithmes pour utiliser efficacement l'approximation MLS.

### 3.1.1 Approximation classique au sens des moindres carrés

Considérons une certaine fonction inconnue  $u$  de la variable  $x$  dont on connaît quelques valeurs  $u_i$  aux points d'échantillonnage  $x_i$ , appelés nœuds, en nombre  $N$ . Nous cherchons l'équation d'une fonction approchée  $u^h(x)$  en nous basant sur ces quelques valeurs. Dans un des cas les plus simples, nous cherchons une fonction approchée linéaire. Cette situation peut se rencontrer par exemple pour déduire une loi linéaire à partir de quelques résultats expérimentaux dispersés, obtenus pour certaines valeurs d'une grandeur caractéristique. L'approximation est

$$u^h(x) = a_0 + a_1x \quad (3.1)$$

où  $a_0$  et  $a_1$  sont des paramètres à déterminer. Pour obtenir la droite qui approxime les valeurs échantillonnées au sens des moindres carrés comme sur la figure 3.2, on forme la norme d'ordre 2 de l'écart entre la solution approchée et les valeurs connues aux points d'échantillonnage :

$$S = \sum_{i=1}^N [a_0 + a_1x_i - u_i]^2 \quad (3.2)$$

et on obtient  $a_0$  et  $a_1$  en minimisant cette somme. Les deux équations  $\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0$  et  $\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0$  sont suffisantes pour trouver les deux inconnues  $a_0$  et  $a_1$ . Il est possible d'accorder un poids différent à chaque valeur en cherchant plutôt à minimiser

$$S = \sum_{i=1}^N w_i [a_0 + a_1x_i - u_i]^2 \quad (3.3)$$

où  $w_i$  est le poids que l'on donne à la valeur  $u_i$ . Ce poids doit être positif pour que la fonction d'approximation s'approche bel et bien des valeurs connues et non ne s'en éloigne. Cette situation se rencontre par exemple si l'indice de confiance en certains résultats expérimentaux est plus élevé qu'en d'autres.

Nous récrivons ces expressions sous forme vectorielle pour faciliter l'extension à des fonctions non-linéaires et/ou à plusieurs variables. L'approximation est donnée par

$$u^h(x) = \mathbf{p}^T(x) \mathbf{a} \quad (3.4)$$

avec les deux fonctions de base

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, x] \quad (3.5)$$

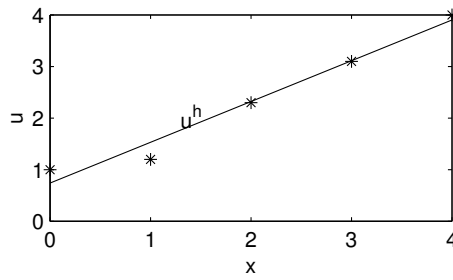


FIG. 3.2 – Approximation au sens des moindres carrés de certains points par une droite

et les deux coefficients

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

La norme pondérée vaut

$$S = \sum_{i=1}^N w_i [\mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a} - u_i]^2 \quad (3.7)$$

qu'il convient de minimiser pour trouver les coefficients

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (3.8)$$

soit

$$\sum_{i=1}^N 2w_i \mathbf{p}(x_i) [\mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a} - u_i] = 0 \quad (3.9)$$

Nous trouvons les coefficients en résolvant le système linéaire suivant

$$\mathbf{A} \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (3.10)$$

où la matrice carrée  $\mathbf{A}$  est donnée par la somme pondérée des produits dyadiques des fonctions de base aux points d'échantillonnage :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{p}(x_i) \mathbf{p}^T(x_i) \quad (3.11)$$

et où le vecteur  $\mathbf{b}$  fait intervenir les valeurs connues  $u_i$  :

$$\mathbf{b} = \sum_{i=1}^N w_i \mathbf{p}(x_i) u_i \quad (3.12)$$

Il est possible d'approximer au sens des moindres carrés par une fonction non-linéaire. Ainsi, pour approximer par une parabole, il suffit de prendre les trois fonctions de base suivantes

$$\mathbf{p}^T(x) = [1, x, x^2] \quad (3.13)$$

et les équations (3.10), (3.11) et (3.12) ci-dessus restent valables pour déterminer les trois coefficients. De même, pour une fonction de plusieurs variables, ces équations demeurent à condition de remplacer le scalaire  $x$  par un vecteur  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Par exemple, une fonction de deux variables est approximée par un plan en utilisant la base à trois fonctions

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y] \quad (3.14)$$

avec trois coefficients à déterminer par les équations ci-dessus et par une fonction quadratique en utilisant la base à six fonctions

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, y^2, xy] \quad (3.15)$$

avec six coefficients à déterminer.

Pour que la matrice  $\mathbf{A}$  soit inversible, il faut que les nœuds soient en nombre suffisant :  $N > m$  où  $m$  est la taille du vecteur des fonctions de base  $\mathbf{p}$ . En outre, il ne faut pas qu'ils occupent une configuration dégénérée, qui dépend de la base choisie. Par exemple, pour la base linéaire à deux dimensions, il ne faut pas que les  $N$  nœuds  $\mathbf{x}_i$  soient tous alignés. Ces deux conditions s'expriment plus mathématiquement comme suit : il faut au moins  $m$  parmi les  $N$  matrices des produits dyadiques  $\mathbf{p}(x_i)\mathbf{p}^T(x_i)$  linéairement indépendantes. Il faut remarquer que, dans ces conditions,  $\mathbf{A}$  est symétrique définie strictement positive puisque il vient, en utilisant (3.10),

$$\mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{y} = \sum_{i=1}^N w_i (\mathbf{p}(x_i) \cdot \mathbf{y})^2 > 0 \quad (3.16)$$

car les poids sont positifs.

### 3.1.2 Définition de l'approximation MLS

D'abord, nous cherchons à construire une approximation locale, au voisinage d'un certain point  $\tilde{\mathbf{x}}$ , sous la forme

$$u_{\text{local}, \tilde{\mathbf{x}}}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) \quad (3.17)$$

où les coefficients  $\mathbf{a}$  dépendent du point  $\tilde{\mathbf{x}}$  autour duquel l'approximation est construite. La norme de l'écart entre l'approximation autour de  $\tilde{\mathbf{x}}$  et les valeurs connues s'écrit comme pour l'approximation classique au sens des moindres carrés mais dépend naturellement de ce point  $\tilde{\mathbf{x}}$  :

$$S(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^{n_{\tilde{\mathbf{x}}}} w_i(\tilde{\mathbf{x}}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}) - u_i]^2 \quad (3.18)$$

Dans cette norme, chaque nœud contribue à l'approximation avec un poids  $w_i$  plus ou moins important selon la distance qui le sépare du point  $\tilde{\mathbf{x}}$ . C'est la raison pour laquelle nous écrivons  $w_i(\tilde{\mathbf{x}})$ . Pratiquement, chaque fonction poids  $w_i$  est positive comme dans le cas de l'approximation au sens des moindres carrés classique et est non-nulle uniquement sur un petit domaine entourant le nœud  $\mathbf{x}_i$  auquel elle correspond. Ainsi, la somme dans l'équation (3.18) se limite à un petit nombre de

termes  $n^{\mathbf{x}}$  qui est plus petit que le nombre total de nœuds  $N$ . La minimisation de  $S$  par rapport aux coefficients  $\mathbf{a}$  nous donne la valeur de ces coefficients comme dans la section précédente.

Ensuite, nous construisons une approximation globale qui vaut en tout point l'approximation locale que nous venons de décrire, construite autour du point considéré. Soit

$$u_{(\text{global})}^h(\mathbf{x}) = u_{\text{local},\mathbf{x}}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

La minimisation de l'erreur permet de trouver les coefficients :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^{\mathbf{x}}} w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) u_i \quad (3.20)$$

avec

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^{\mathbf{x}}} w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (3.21)$$

En inversant l'équation (3.20) et en utilisant l'équation (3.19), nous aboutissons à la forme suivante pour l'approximation MLS où nous omettons désormais l'indice « global » :

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \left( \sum_{i=1}^{n^{\mathbf{x}}} w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) u_i \right) \quad (3.22)$$

que nous réécrivons

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (3.23)$$

où la *fonction de forme* associé au nœud  $i$  est donnée par

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_i(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

avec

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (3.25)$$

Une illustration à une dimension de l'utilisation des fonctions de forme MLS est fournie à la figure 3.3. Cinq nœuds sont uniformément répartis sur l'intervalle  $[0, 4]$ . Les valeurs d'une fonction à approcher  $y$  sont connues

$x_i$	0	1	2	3	4
$u_i$	1	3	4	3	2,5

Dans la colonne de gauche, l'interpolation par éléments finis est illustrée pour comparer. La figure (a) présente les fonctions de forme des éléments finis linéaires construits sur les nœuds et montre en gras la fonction de forme du nœud central. La figure (b) présente l'interpolation de la fonction inconnue obtenue en multipliant les fonctions de forme par les valeurs connues et en sommant les contributions. Dans la colonne de droite, trois figures illustrent l'approximation MLS. Les fonctions poids  $w_i(\mathbf{x})$  choisies sont présentées sur la figure (c) en mettant à nouveau en évidence le nœud central. Les fonctions de forme  $\phi_i(\mathbf{x})$  construites à l'aide de celles-ci sont présentées sur la figure (d). Enfin, l'approximation MLS de la fonction inconnue, obtenue en multipliant les fonctions de forme par les valeurs connues et en sommant les contributions par application de (3.23), est illustrée sur la figure (e).

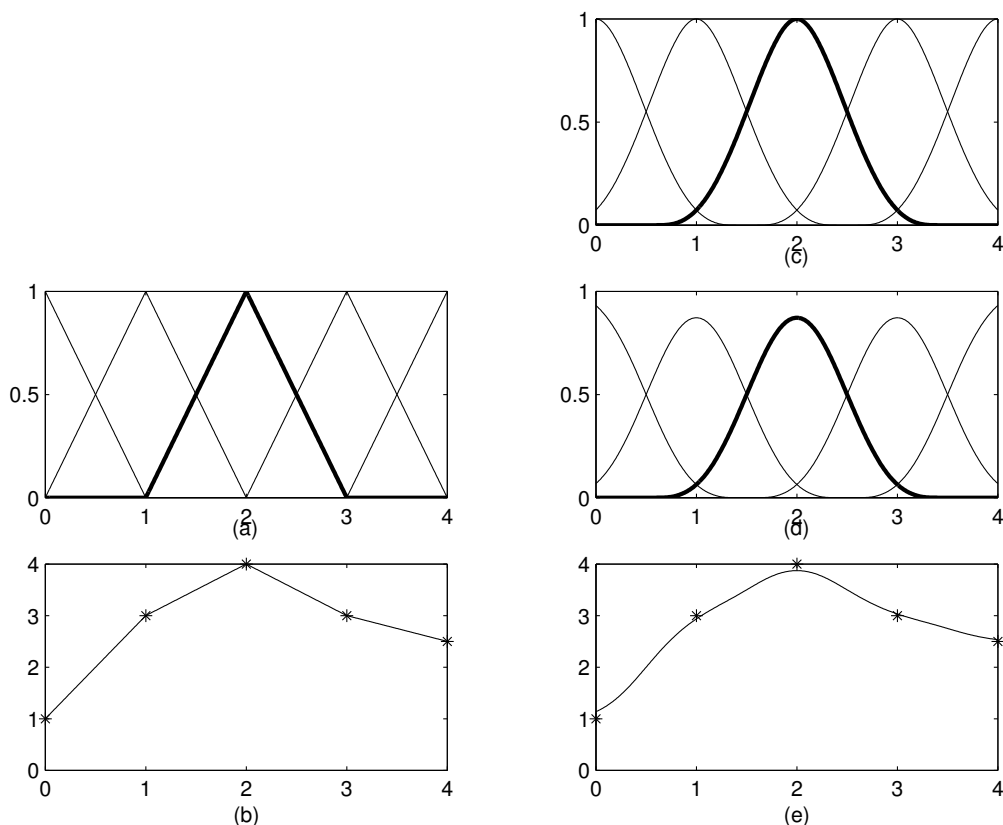


FIG. 3.3 – Interpolation par éléments finis et approximation sans maillage

### 3.1.3 Propriétés des fonctions de forme MLS

La première propriété des fonctions de forme MLS à noter est qu'elles ne dépendent effectivement d'aucun maillage. Seuls un vecteur de fonctions de base  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  et un ensemble de nœuds à chacun desquels correspond une fonction poids  $w_i(\mathbf{x})$  sont nécessaires. En un point donné, les fonctions de forme sont toutes construites simultanément. Les trois étapes de cette construction sont :

1. la construction de la matrice  $\mathbf{A}$  par la formule (3.21) en ajoutant la contribution de chaque nœud au point considéré (en pratique, seuls les nœuds de poids non-nul en ce point contribuent) ;
2. l'inversion de la matrice  $\mathbf{A}$  ;
3. le calcul de chaque fonction de forme par les formules (3.24) et (3.25).

Les autres propriétés remarquables des fonctions de forme MLS sont les suivantes.

**Localité** La fonction de forme  $\phi_i(\mathbf{x})$  est nulle en-dehors du support de la fonction poids  $w_i(\mathbf{x})$ . Cela se voit immédiatement sur l'équation (3.24) par la présence du facteur  $w_i(\mathbf{x})$ . C'est la raison pour laquelle nous sommes autorisés à faire la somme (3.23) jusque  $N$  plutôt que  $n^x$  car cela revient à ajouter des termes nuls. Notons que  $\phi_i(\mathbf{x})$  peut-être négatif alors que  $w_i(\mathbf{x})$  est toujours choisi positif.

**Condition d'existence** La fonction de forme  $\phi_i(\mathbf{x})$  est bien définie sur le domaine  $\Omega$  de l'approximation si et seulement si  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  est inversible en tout point  $\mathbf{x}$  du



domaine. Pour que ce soit le cas, de manière semblable à l'approximation au sens des moindres carrés classique, il faut que chaque point soit couvert par au moins  $m$  supports dont les matrices  $\mathbf{p}(x_i)\mathbf{p}^T(x_i)$  associées sont linéairement indépendantes. Une condition nécessaire est  $n^{\mathbf{x}} \geq m$  en tout point  $\mathbf{x}$ . Pour une base linéaire à deux dimensions par exemple, il faut et il suffit que chaque point soit couvert par au moins 3 supports de nœuds non-alignés. Pratiquement, cette condition impose une limite inférieure à la taille des supports : il faut que les supports soient « suffisamment » grands pour que chaque point soit « suffisamment » couvert.

**Absence d'interpolation** À la différence des fonctions de forme de la méthode des éléments finis, les fonctions de forme MLS sont différentes de 1 au nœud auquel elles sont associées et ne sont pas nécessairement nulles aux autres nœuds :

$$\phi_i(\mathbf{x}_j) \neq \delta_{ij} \quad (3.26)$$

C'est pour cette raison que l'approximation MLS est effectivement une approximation et non une interpolation :

$$u^h(\mathbf{x}_i) \neq u_i \quad (3.27)$$

Cet effet est visible sur la figure 3.3(e) : la courbe qui approxime ne passe pas par les points d'échantillonnage.

**Consistance** Les fonctions de forme MLS peuvent reproduire exactement toute fonction appartenant au noyau de  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ . En effet, une fonction du noyau de  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  a la forme

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\alpha \quad (3.28)$$

Si nous prenons comme coefficients  $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \alpha$ , la norme  $S$  est nulle. Sachant que  $S$  est par définition positive ou nulle, notre choix de coefficients est bien celui qui minimise  $S$  et l'approximation est donnée par

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\alpha = u(\mathbf{x}) \quad (3.29)$$

Par exemple, si les points  $(x_i, u_i)$  sont alignés et qu'une base linéaire  $[1, x]$  est utilisée, la fonction approchée  $u^h$  est la droite passant par ces points, quelles que soient les fonctions poids choisies.

**Continuité** Les fonctions de forme ont le même degré de continuité que la fonction la moins continue parmi la fonction de base et les fonctions poids. Formellement, si les  $\phi_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont bien définies (c'est-à-dire si la condition d'existence est satisfaite) et si

$$p_j(\mathbf{x}) \ (j = 1, 2, \dots, m) \in C^l(\Omega) \ (l \geq 0) \quad (3.30)$$

et

$$w_i(\mathbf{x}) \ (i = 1, 2, \dots, n) \in C^q(\Omega) \ (q \geq 0) \quad (3.31)$$

alors

$$\phi_i(\mathbf{x}) \ (i = 1, 2, \dots, n) \in C^{\min(l,q)}(\Omega) \quad (3.32)$$

Les démonstrations de la condition d'existence et de la propriété de continuité se trouvent dans Duarte et Oden (1996b)

### 3.1.4 Choix des fonctions de base

Si en théorie, n'importe quelle fonction peut être présente dans le vecteur des fonctions de base, en pratique, dans la quasi-unanimité des travaux présents dans la littérature, le choix est limité à l'ensemble des monômes jusqu'à un certain ordre. Dans certains cas particuliers, en cas de connaissance a priori de l'aspect des fonctions à approcher, une fonction qui prend en compte cet aspect peut être ajouté à la base des monômes (voir section 4.3.3). Ce tableau reprend les bases constantes, linéaires et quadratiques à une, deux et trois dimensions

	1D	2D	3D
constant	[1]	[1]	[1]
linéaire	[1, $x$ ]	[1, $x, y$ ]	[1, $x, y, z$ ]
quadratique	[1, $x, x^2$ ]	[1, $x, y, x^2, y^2, xy$ ]	[1, $x, y, z, x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz$ ]

Puisque toutes ces fonctions de base appartiennent à  $C^\infty(\Omega)$ , les fonctions de forme MLS ont le même degré de continuité que les fonctions poids. Comme la fonction constante est toujours présente dans l'ensemble des fonctions de base, la propriété de consistance implique que

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.33)$$

Notons que cette propriété est partagée par les fonctions de forme de la méthode des éléments finis classique. Voyant dans cette propriété un partage par les fonctions de forme de la fonction constante unitaire, Melenk et Babuška (1996) ont baptisé celle-ci *partition de l'unité*. Le cas particulier de l'approximation MLS avec une base constante est l'approximation de Shepard (1968), qui est en fait bien antérieure à l'approximation MLS. Elle donne une expression des fonctions de forme plus simple car la matrice  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  est réduite à la taille  $1 \times 1$  :

$$\phi_i^{\text{Shepard}}(\mathbf{x}) = \frac{w_i(\mathbf{x})}{\sum_{j=1}^{n^{\mathbf{x}}} w_j(\mathbf{x})} \quad (3.34)$$

Dans la suite, nous utilisons une base linéaire sauf mention contraire. Les raisons de ce choix, qui est le choix habituel dans la littérature, sont doubles :

- une base constante est plus économe en temps de calcul mais l'approximation n'est alors pas capable de représenter exactement un champ linéaire, ce qui est requis pour le champ de déplacement dans une méthode de Galerkin ;
- une base quadratique demande que chaque point du domaine soit couvert par un nombre plus important de supports et une matrice  $\mathbf{A}$  à inverser en chaque point de taille plus importante que pour une base linéaire et ce surcoût de temps de calcul conduit à un rapport coût/performance qui se révèle plus important à l'usage.

Nous utilisons tout de même une base constante à la section 3.5.2 et une base quadratique à la section 8.2.2.

### 3.1.5 Choix des fonctions poids

Le choix habituel pour les fonctions poids est une fonction qui décroît avec la distance avec le nœud auquel elle est associée et qui possède la forme d'une cloche. À une dimension, si  $s$  est la distance normalisée entre un nœud  $i$  et un point  $x$  quelconque :

$$s = \left| \frac{x_i - x}{d_i} \right| \quad (3.35)$$

où  $d_i$  est la taille du support du nœud  $i$ , quelques choix courants pour  $w_i(x)$  sont

- une gaussienne tronquée

$$f_1(s) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (3.36)$$

qui a le désavantage d'être discontinue en  $s = 1$  bien que cette discontinuité passe inaperçue numériquement si  $\alpha$  est suffisamment grand ;

- une gaussienne modifiée

$$f_2(s) = \begin{cases} \frac{e^{-\left(\frac{s}{\alpha}\right)^2} - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}}{1 - e^{-\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2}} & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (3.37)$$

qui est proche de la précédente et  $C^0$  ;

- une spline d'ordre 3

$$f_3(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4s^2 + 4s^3 & \text{si } |s| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4s + 4s^2 - \frac{4}{3}s^3 & \text{si } \frac{1}{2} < |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

qui est  $C^1$  et

- une spline d'ordre 4

$$f_4(s) = \begin{cases} 1 - 6s^2 + 8s^3 - 3s^4 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (3.39)$$

qui est  $C^2$ .

L'expérience montre que les résultats obtenus varient peu selon la fonction poids choisie. Par la suite, nous utiliserons cette dernière spline d'ordre 4. L'illustration à une dimension de la figure 3.3 utilisait déjà la spline d'ordre 4.

À deux ou trois dimensions, une des fonctions ci-dessus est choisie et les fonctions poids ont soit un domaine circulaire

$$w_i(\mathbf{x}) = f_a\left(\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i}\right) \quad (3.40)$$

soit un domaine rectangulaire

$$w_i(\mathbf{x}) = f_a\left(\frac{|x - x_i|}{d_i^x}\right) f_a\left(\frac{|y - y_i|}{d_i^y}\right) \quad (3.41)$$

à deux dimensions et

$$w_i(\mathbf{x}) = f_a\left(\frac{|x - x_i|}{d_i^x}\right) f_a\left(\frac{|y - y_i|}{d_i^y}\right) f_a\left(\frac{|z - z_i|}{d_i^z}\right) \quad (3.42)$$

à trois dimensions. Par la suite, sauf à la section 3.5.2, nous utilisons un domaine circulaire.

Une illustration à deux dimensions est fournie sur les figures suivantes. Sur la figure 3.4, nous montrons l'ensemble de nœuds utilisé et leur support :  $5 \times 5$  nœuds sont distribués uniformément dans un domaine carré  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  et les fonctions poids sont des splines d'ordre 4 définies sur un domaine circulaire de rayon 1,4. Sur la figure 3.5, nous traçons à gauche le poids du nœud central, dont le support est mis en évidence sur la figure précédente, et à droite la fonction de forme associée à ce nœud par utilisation d'une base linéaire. Le calcul des fonctions de forme est possible car tous les points sont bien recouverts par au moins trois supports, grâce au rayon de longueur suffisante choisi. Nous remarquons que l'aspect de la fonction poids et la fonction de forme associée est semblable, même si l'amplitude de ces fonctions sont différentes (les échelles pour l'élévation sont différentes sur les deux graphes). D'autres graphes de ressemblance entre la fonction de forme et la fonction poids se trouvent dans Atluri, Kim et Cho (1999). Cette ressemblance a une importance critique dans notre technique d'enrichissement par l'intermédiaire des fonctions poids présentée à la section 4.3.4. Pour comparer, nous montrons sur la figure 3.7 la fonction de forme associée au nœud central, appartenant à l'ensemble des fonctions de forme construites sur les éléments finis triangulaires linéaires qui maillent l'ensemble des  $5 \times 5$  nœuds de la manière illustrée sur la figure 3.6.

Sur la figure 3.5 à deux dimensions comme précédemment sur la figure 3.3, nous avons utilisé un ensemble de nœuds équidistants avec des poids identiques mais insistons sur le fait que ce n'est pas une obligation. Les nœuds peuvent bien entendu être dispersés irrégulièrement. De même, les poids peuvent varier autant en forme (circulaire, rectangulaire ou autre), en taille ( $d_i$ ) et en nature (spline d'ordre 4, exponentiel ou autre). Les seules contraintes sont que les poids soient tous positifs et qu'il y ait suffisamment de poids non-nuls en tout point pour que l'approximation soit bien définie. Cette liberté dans les poids tranche avec le choix de l'ensemble des fonctions de base : celui-ci est unique pour toute l'approximation (sauf technique spéciale, voir 4.3.3).

Finalement, il est possible de calculer les dérivées des fonctions poids de manière analytique. Pour la spline d'ordre 4 défini sur un domaine circulaire par exemple, nous avons, en notant  $s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i}$ ,

$$w_{i,k}(\mathbf{x}) = f_4' \frac{x_k - x_{ik}}{s d_i^2} \quad (3.43)$$

$$w_{i,kl}(\mathbf{x}) = \left( f_4'' - \frac{f_4'}{s} \right) \frac{(x_k - x_{ik})(x_l - x_{il})}{s^2 d_i^4} + f_4' \frac{\delta_{kl}}{s d_i^2} \quad (3.44)$$

avec,

$$f_4'(s) = \begin{cases} -12s + 24s^2 - 12s^3 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (3.45)$$

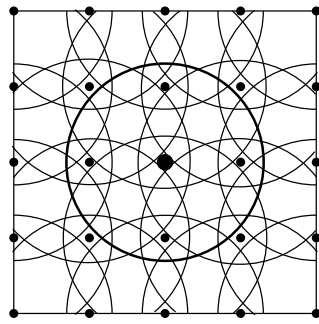


FIG. 3.4 – Distribution régulière de  $5 \times 5$  nœuds

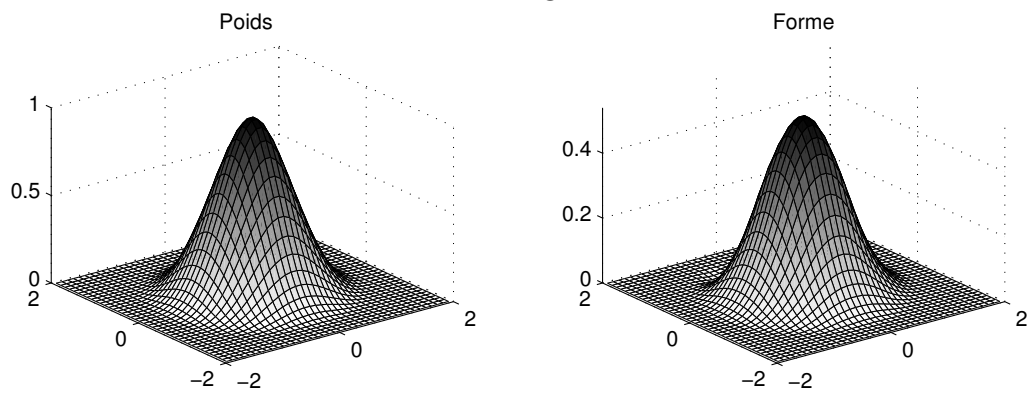


FIG. 3.5 – Fonction poids et fonctions de forme

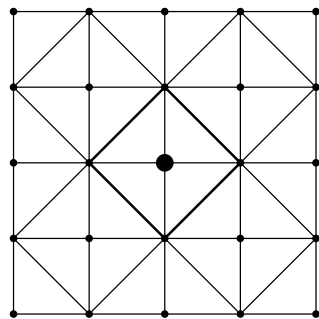


FIG. 3.6 – Maillage éléments finis sur  $5 \times 5$  nœuds

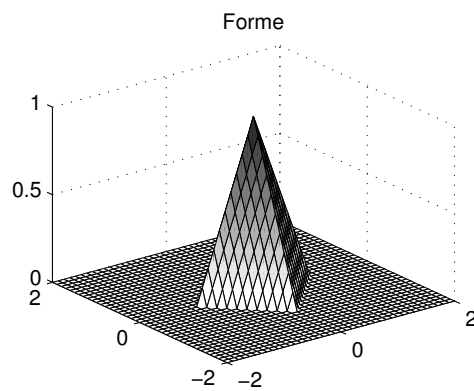


FIG. 3.7 – Fonction de forme éléments finis

$$f_4''(s) = \begin{cases} -12 + 48s - 48s^2 & \text{si } |s| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |s| > 1 \end{cases} \quad (3.46)$$

dont la définition en  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i$  est bien unique :  $w_{i,k}(\mathbf{x}_i) = 0$  et  $w_{i,kl}(\mathbf{x}_i) = -\frac{12 \cdot \delta_{kl}}{d_i^2}$ .

### 3.1.6 Algorithmes pour le calcul efficace des fonctions de forme MLS

Cette sous-section où nous décrivons deux de nos algorithmes est assez difficile et technique. Sa compréhension n'est pas essentielle au reste de la thèse mais la mise en place de ces algorithmes est indispensable en pratique pour utiliser une méthode sans maillage sur des problèmes réels, surtout à trois dimensions.

#### Sélection des nœuds

Le calcul des fonctions de forme MLS en un point est donné par la formule (3.24) qui repose sur les formules (3.25) et (3.21). Ce calcul demande de former la matrice  $\mathbf{A}$  en sommant des contributions apportées par chacun des nœuds dont le support recouvre le point considéré. Il est essentiel pour l'efficacité de la méthode de trouver rapidement quels sont les nœuds qui jouent un rôle dans le calcul des fonctions de forme MLS en un point. Contrairement à ce que prétendent certains articles de la littérature, c'est bien cette étape de sélection des nœuds qui est la plus coûteuse en temps de calcul et non l'inversion de la matrice  $\mathbf{A}$  (qui est simplement de taille  $3 \times 3$  pour une base linéaire à deux dimensions par exemple).

Nous expliquons d'abord la méthode de sélection à deux dimensions et généralisons ensuite. Le principe de notre méthode est le suivant :

1. nous construisons avant tout une liste de carrés disjoints, dont l'union recouvre tout le domaine, auxquels est associée la liste des nœuds avec le support desquels ils ont une intersection non-vide ;
2. ensuite, pour chaque point considéré, nous déterminons rapidement le carré auquel il appartient et nous prenons comme liste réduite des nœuds qui peuvent influencer ce point la liste associée au carré trouvé ;
3. nous calculons le poids de chacun de ces nœuds candidats tour à tour, ignorons les nœuds de poids nul et retenons le poids des nœuds de poids non-nul.

Le découpage du domaine en carrés se fait de manière récursive et les données sont conservées dans un arbre. À chaque nœud de l'arbre<sup>1</sup>, nous retenons les coordonnées d'un carré et la liste des  $\mathbf{x}_i$  qui ont une intersection non-nulle avec le carré. Les étapes de la procédure récursive sont les suivantes :

**Initiation** Au sommet de l'arbre sont associés un carré dans lequel le domaine est inscrit et la liste de l'ensemble des  $\mathbf{x}_i$ . Ce nœud de l'arbre est le nœud courant et il passe par l'étape de *division*.

**Division** Si le *critère d'arrêt* est vérifié pour le nœud courant, remonter d'un niveau dans la procédure récursive : le nœud courant devient le nœud père. S'il n'est pas vérifié,

---

<sup>1</sup>Attention de ne pas confondre un *nœud de l'arbre* avec un nœud  $\mathbf{x}_i$  de l'approximation MLS, simplement noté  $\mathbf{x}_i$  dans la suite de cette section.

1. créer 4 nœuds fils du nœud courant, découper le carré en 4 carrés égaux et associer chacun à un fils ;
2. pour chaque fils, parcourir la liste des  $\mathbf{x}_i$  et insérer dans la liste du fils les  $\mathbf{x}_i$  qui ont une intersection non-nulle avec le carré associé à ce fils (certains  $\mathbf{x}_i$  se retrouvent dans plusieurs listes) ;
3. faire passer au premier fils l'étape de *division*, qui devient le nœud courant ;
4. faire de même pour les trois autres fils tour à tour ;
5. supprimer la liste des  $\mathbf{x}_i$  devenue inutile une fois la répartition parmi les 4 fils effectuée ;
6. la division de ce nœud achevée, remonter d'un niveau et sortir si le nœud courant est le sommet.

**Critère d'arrêt** Le critère d'arrêt est vérifié si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

1. La principale condition est de cesser de diviser si la taille de la liste des  $\mathbf{x}_i$  du nœud courant est inférieure à une certaine valeur fixée. Cette valeur résulte d'un compromis : si elle est trop grande, la liste des  $\mathbf{x}_i$  candidats pour un point donné est trop importante et si elle est trop petite, l'arbre à parcourir pour obtenir la liste des  $\mathbf{x}_i$  candidats est trop profond. Le compromis à faire dépend de la taille des supports des  $\mathbf{x}_i$  : avec de grands supports, il y a des recouvrements de nombreux supports et il est préférable de choisir une limite plus haute que pour des petits supports. D'après notre expérience, une liste de taille maximale de 40  $\mathbf{x}_i$  à deux dimensions et 80  $\mathbf{x}_i$  à trois dimensions convient.
2. La condition précédente n'est pas suffisante pour exclure une récursion infinie. La division est arrêtée également si la taille du carré du nœud courant est inférieure à une certaine limite.

Une fois l'arbre construit, étant donné un point appartenant au domaine, nous pouvons rapidement descendre dans l'arbre du sommet jusqu'à la feuille du carré auquel appartient le point considéré et obtenir les candidats. Il suffit de comparer les coordonnées du point avec les coordonnées du centre du carré du nœud courant pour choisir le bon fils parmi les quatre à chaque étage. La taille de la liste des candidats diminue exponentiellement puisqu'elle est approximativement divisée par quatre à chaque étage. Pour donner un ordre de grandeur, avec le type d'ensembles de  $\mathbf{x}_i$  que nous utiliserons en pratique dans nos exemples de résultats, le profondeur de l'arbre est de 5 niveaux environ. Donc, en environ 5 simples opérations de comparaison des coordonnées de deux points (le point considéré et les centres des carrés), nous réduisons la liste des candidats de plusieurs centaines à une vingtaine.

Finalement, dans le type de calcul que nous effectuerons pour simuler des phénomènes de fissuration, nous verrons que quelques  $\mathbf{x}_i$  sont ajoutés entre chaque étape de la modélisation. Ils sont aisément introduits au sommet de l'arbre puis descendus de manière récursive jusqu'aux feuilles qui possèdent les carrés qui ont une intersection non-nulle avec leur support.

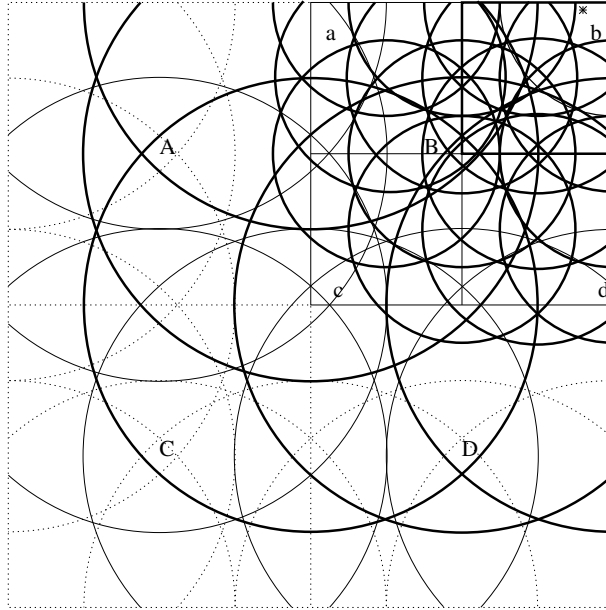


FIG. 3.8 – Quadtree pour sélectionner les nœuds

Le type d'arbre que nous venons de décrire s'appelle *quadtree*. De manière similaire à cet arbre à deux dimensions où il est formé de carrés à diviser en quatre, il est possible d'accélérer la sélection des nœuds candidats en pratiquant des découpes en deux sur des segments à une dimension et à des découpes en huit sur des cubes à trois dimensions. À trois dimensions, l'arbre porte le nom d'*octree*.

Nous détaillons l'algorithme sur l'exemple de la figure 3.8 pour clarifier. Dans un carré, 45 supports circulaires sont présents, qui sont plus nombreux et petits dans le coin supérieur droit. Pour cet exemple, nous choisissons une limite de  $25 \mathbf{x}_i$  par feuille de l'arbre. L'algorithme débute avec le grand carré qui est associé aux 45 supports. Celui-ci est divisé en 4 carrés A, B, C et D. Ce sont les fils du grand carré. Nous faisons une boucle sur A, B, C, D pour leur attribuer les supports parmi les 45 avec lesquels ils ont une intersection. Il y a 21 supports à attribuer à A. Nous descendons en A, constatons que le critère d'arrêt est vérifié et remontons aussitôt. Il y a 27 supports à attribuer à B, qui sont représentés en trait plein (fin ou gras). Nous descendons en B et constatons que la division n'est pas finie. Nous divisons B en 4 carrés (a, b, c et d) et attribuons à chacun les supports parmi les 27 avec lesquels ils ont une intersection. Le critère d'arrêt est vérifié pour chacun. Par exemple, il y a 21 supports attribués à b, qui sont représentés en trait plein gras. Nous pouvons supprimer la liste des supports en B qui n'est plus nécessaire. Nous remontons d'un étage où nous traitons C (14 supports) puis D (21 supports). Nous pouvons à présent supprimer la liste associée au grand carré. Nous remontons alors d'un étage mais comme nous sommes à la racine, l'algorithme s'achève. Désormais, si nous cherchons les fonctions poids au point représenté par une étoile, il est très rapide de comparer ses coordonnées avec celles du centre du grand carré pour déterminer qu'il appartient à B, puis de les comparer au centre de B pour conclure qu'il appartient à b. Nous cherchons donc simplement les poids potentiellement non-nuls en ce point parmi les 21 supports candidats de b, plutôt que sur l'ensemble initial des 45 supports.



Évidemment, le gain sur un exemple réel possédant nettement plus de nœuds est plus important que sur ce petit exemple.

### Implémentation des formules

L'expression utilisée dans l'équation (3.24) pour la fonction de forme sépare les facteurs  $\mathbf{c}(\mathbf{x})$  qui dépend du point d'évaluation,  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  qui dépend du nœud et  $w_i(\mathbf{x})$  qui dépend des deux. Pour rappel :

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_i(\mathbf{x}) \quad (3.47)$$

avec

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}) \quad (3.48)$$

Cette expression facilite le calcul efficace des fonctions de forme et de leurs dérivées. En effet, elle met en évidence le fait que, en un point donné, il est préférable de calculer le vecteur  $\mathbf{c}$  dans un premier temps puisqu'il est le même pour tous les nœuds, ce qui nécessite une seule inversion de la matrice  $\mathbf{A}$  puis seulement de faire une boucle sur les nœuds de poids non-nul au point considéré pour calculer leur fonction de forme. Elle est différente de l'expression originale de Nayroles, Touzot et Villon (1992) qui a été reprise par Belytschko, Lu et Gu (1994) puis dans tous les articles sur la méthode sans maillage :

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}) (\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}))_{ji} \quad (3.49)$$

avec

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), \dots, w_N(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_N)] \quad (3.50)$$

qui suggère au contraire de faire une substitution arrière pour chaque nœud.

Plus encore, si les dérivées des fonctions de forme sont nécessaires comme c'est le cas quand l'approximation MLS est utilisée pour résoudre des équations aux dérivées partielles par une méthode sans maillage, la dérivation de l'équation (3.24) montre qu'il n'est nécessaire de factoriser qu'une seule fois la matrice  $\mathbf{A}$  et de faire une substitution arrière une fois pour  $\mathbf{c}$  et une fois pour chacune des dérivées  $\mathbf{c}_{,k}$  avec  $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$ . En effet, les dérivées sont données par :

$$\phi_{i,k}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_{,k}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_i(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_{i,k}(\mathbf{x}) \quad (3.51)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{,k}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{A}^{-1})_{,k}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x}) \\ &= \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) [-\mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}_{,k}(\mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3.52)$$

et

$$\mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n^x} w_{i,k}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (3.53)$$

Nous remarquons encore que dans les équations (3.21) et (3.53) les matrices symétriques des produits dyadiques  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)$  qui interviennent ne dépendent pas du point où nous cherchons à évaluer les fonctions de forme. C'est aussi le cas pour les vecteurs  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  qui interviennent dans les équations (3.24) et (3.51). Donc, si la taille du problème le permet, il est plus efficace de calculer une fois pour toutes ces grandeurs et de les conserver à chaque nœud à côté des grandeurs qui définissent le nœud que sont les coordonnées du nœud et le pointeur vers la fonction poids. Finalement, en remarquant que la première des fonctions de base est la fonction unité et qu'elle est suivie des fonctions linéaires si la base est au moins linéaire, on peut astucieusement se contenter de conserver uniquement  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)$  et d'y retrouver  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  et les coordonnées  $\mathbf{x}_i$ . Par exemple, pour une base linéaire bidimensionnelle, le produit dyadique est

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ x_i & x_i^2 & x_i y_i \\ y_i & x_i y_i & y_i^2 \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

et il suffit de conserver la partie inférieure de cette matrice au nœud  $i$  dans un tableau

$$\boxed{\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & x_i & y_i \\ \hline x_i^2 & x_i y_i & y_i^2 \\ \hline \end{array}}$$

et de programmer de telle sorte que le tableau des éléments 2 et 3 soit retourné si les coordonnées sont demandées et que le tableau des éléments 1, 2 et 3 soit retourné si les fonctions de base sont demandées.

L'algorithme détaillé pour calculer  $\phi_i$  et  $\phi_{i,k}$  en un point  $\mathbf{x}$  donné est le suivant :

1. Trouver la liste des nœuds candidats à l'aide de l'arbre.
2. Initialiser les matrices symétriques  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}_k$  ( $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$ ) à 0.
3. Faire une boucle sur les nœuds candidats et calculer le poids de ce nœud et ses dérivées en  $\mathbf{x}$ . Si ce poids est non-nul,
  - (a) retenir le numéro de ce nœud dans le tableau des nœuds d'influence ;
  - (b) conserver la valeur du poids et de ses dérivées ;
  - (c) ajouter la contribution de ce nœud à  $\mathbf{A}$  (3.21) et  $\mathbf{A}_k$  (3.53) pour  $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$  à l'aide des matrices des produits dyadiques pré-calculées.
4. Calculer la factorisation de Cholesky de  $\mathbf{A}$ . Nous pouvons utiliser la factorisation de Cholesky, plus efficace que la factorisation LU plus générale, car  $\mathbf{A}$  est symétrique définie positive.
5. Évaluer  $\mathbf{p}$ .
6. Calculer  $\mathbf{c} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{p}$  par substitution arrière sur la matrice  $\mathbf{A}$  factorisée.
7. Pour  $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$ ,
  - (a) évaluer  $\mathbf{p}_{,k}$  ;
  - (b) calculer  $\mathbf{c}_{,k} = \mathbf{A}^{-1}[-\mathbf{A}_{,k}\mathbf{c} + \mathbf{p}_{,k}]$  par substitution arrière sur la matrice  $\mathbf{A}$  factorisée.
8. Faire une boucle sur les nœuds d'influence retenus à l'étape 3 ( $i = 1, 2, \dots, n^{\mathbf{x}}$ ) :

- (a) Calculer  $d = \mathbf{c}^T \mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  à l'aide du vecteur  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  pré-calculé,
- (b) Calculer  $\phi_i = dw_i(\mathbf{x})$  grâce au poids que nous avons conservé à l'étape 3b.
- (c) Pour  $k = 1, \dots, n_{\text{dim}}$ , calculer  $\phi_{i,k}$  par (3.51) connaissant  $d$ ,  $\mathbf{c}_{,k}$ , le vecteur  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$  pré-calculé et les valeurs  $w_i(\mathbf{x})$  et  $w_{i,k}(\mathbf{x})$  retenues plus haut.

Au chapitre 8, les dérivées secondes nous seront aussi nécessaires. Elles sont données par

$$\begin{aligned} \phi_{i,kl}(\mathbf{x}) &= \mathbf{c}_{,kl}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_i(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_{,k}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_{i,l}(\mathbf{x}) \\ &+ \mathbf{c}_{,l}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_{i,k}(\mathbf{x}) + \mathbf{c}^T(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_{i,kl}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

avec

$$\mathbf{c}_{,kl}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) [\mathbf{p}_{,kl}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,k}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{,l}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,l}(\mathbf{x}) \mathbf{c}_{,k}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{,kl}(\mathbf{x}) \mathbf{c}(\mathbf{x})] \quad (3.56)$$

et

$$\mathbf{A}_{,kl}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N w_{i,kl}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \quad (3.57)$$

L'algorithme pour obtenir les fonctions de forme et les deux premières dérivées est semblable à l'algorithme précédemment décrit pour le calcul des fonctions de forme et des dérivées premières. Il faut y ajouter le calcul de  $w_{,kl}$  à l'étape 3, de  $\mathbf{A}_{,kl}$  à l'étape 3c, de  $\mathbf{c}_{,kl}$  comme étape 7c et de  $\phi_{,kl}$  comme étape 8d.

## 3.2 Méthodes des éléments finis et sans maillage

Le principe de base de la méthode sans maillage est proche de celui de la méthode des éléments finis. Pour cette raison, nous consacrons le début de cette section à un rappel de la méthode des éléments finis. Ensuite, nous donnons le principe des méthodes sans maillage et mettons en évidence les différences entre les deux méthodes.

### 3.2.1 Méthode des éléments finis

Pour obtenir la forme faible des équations de l'élasticité habituellement utilisée dans la méthode des éléments finis, nous considérons une fonction de déplacement de test  $\delta \mathbf{u}$  continûment différentiable sur  $\Omega$  et nulle sur  $\Gamma_u$ . Nous multiplions l'équation d'équilibre en volume (2.10) par la fonction de test et intégrons ce produit sur  $\Omega$ , nous multiplions l'équation d'équilibre en surface (2.11) par la fonction de test et intégrons sur  $\Gamma_t$  puis soustrayons ces deux équations :

$$- \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot (\nabla^T \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}}) \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}}) \, d\Gamma = 0 \quad (3.58)$$

Après intégration par parties du premier terme, utilisation du théorème d'intégration de Gauss et prise en compte de la symétrie de  $\boldsymbol{\sigma}$ , nous obtenons la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta \mathbf{u}^T : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (3.59)$$

Pour des champs  $\mathbf{u}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\sigma}$  qui satisfont les relations de compatibilité et les relations constitutives, cette équation est vérifiée par construction quel que soit le déplacement de test  $\delta\mathbf{u}$  si l'équilibre est atteint. On peut montrer que la réciproque est vraie : si cette équation est vérifiée quel que soit le déplacement de test  $\delta\mathbf{u}$ , les équations d'équilibre sont vérifiées.

De manière rigoureuse, nous définissons l'espace fonctionnel suivant, appelé espace de Sobolev du premier ordre :

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \mid f_{,i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\} \quad (3.60)$$

où  $L^2(\Omega)$  est l'ensemble des fonctions de carré intégrable :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f \mid \int_{\Omega} f(\mathbf{x})^2 d\Omega < +\infty \right\} \quad (3.61)$$

Cet espace est aussi noté  $H^0(\Omega)$ , l'espace de Sobolev d'ordre zéro. La forme faible des équations de l'élasticité s'énonce alors de la manière suivante :

Déterminer les déplacements  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$ , les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon} \in H^0(\Omega)$  et les contraintes  $\boldsymbol{\sigma} \in H^0(\Omega)$  qui satisfont (2.7), (2.8) et (2.9) et qui sont tels que (3.59) est vérifié pour tout  $\delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  avec  $\delta\mathbf{u} = 0$  sur  $\Gamma_u$ .

Comme la condition de compatibilité sur la frontière (2.8) doit être vérifiée par le champ de déplacement a priori, elle porte le nom de condition aux limites essentielle.

Dans une méthode numérique, la solution  $\mathbf{u}$  est recherchée dans un sous-espace de  $H^1(\Omega)$  de dimension finie et l'équation variationnelle n'est vérifiée que pour les déplacements de test  $\delta\mathbf{u}$  appartenant à un sous-espace de  $H^1(\Omega)$ . Par exemple, les champs  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  peuvent être approximés par une combinaison linéaire de certaines fonctions de  $H^1(\Omega)$ . Si l'ensemble des fonctions pour  $\mathbf{u}$  et celui pour  $\delta\mathbf{u}$  sont identiques, la méthode numérique est dite méthode de Galerkin. Dans ce cas,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i \quad (3.62)$$

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{d}_i \quad (3.63)$$

Dans cette sous-section, les fonctions de forme  $\phi_i$  sont celles construites à l'aide d'une maillage en éléments finis.

Nous introduisons ces approximations du déplacement réel et du déplacement de test dans le principe variationnel exprimé avec la notation tableau

$$\int_{\Omega} ([\nabla] \delta\mathbf{u})^T \{\boldsymbol{\sigma}\} d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = 0 \quad (3.64)$$

---

<sup>2</sup>En vérité, ce sont chacune des *composantes* des vecteurs et tenseurs qui appartiennent aux espaces fonctionnels.

tout en tenant compte de la loi de comportement élastique :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_{\Omega} ([\nabla] \phi_i \mathbf{d}_i)^T [\mathbf{D}] ([\nabla] \phi_j \mathbf{q}_j) \, d\Omega - \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{d}_i^T \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_t} \phi_i \mathbf{d}_i^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma = 0 \quad (3.65)$$

Ensuite, nous extrayons les degrés de liberté des intégrales :

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \mathbf{d}_i^T \mathbf{K}_{ij} \mathbf{q}_j - \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i^T \mathbf{g}_i = 0 \quad (3.66)$$

avec

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{D}] \mathbf{B}_j \, d\Omega \quad (3.67)$$

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Omega} \phi_i \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (3.68)$$

et  $\mathbf{B}_i = [\nabla] \phi_i$  qui vaut à deux dimensions

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

et à trois dimensions

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \phi_{i,x} & 0 & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{i,z} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} & 0 \\ \phi_{i,z} & 0 & \phi_{i,x} \\ 0 & \phi_{i,z} & \phi_{i,y} \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

Les degrés de liberté du déplacement de test  $\mathbf{d}_i$  qui correspondent à un nœud sur la frontière  $\Gamma_u$  sont fixés à zéro. Comme les fonctions de forme des éléments finis sont interpolantes, le déplacement de test  $\delta \mathbf{u}$  est bien identiquement nul sur l'ensemble de  $\Gamma_u$ . Les autres degrés de liberté de  $\mathbf{d}_i$  sont libres et il faut que le principe variationnel discrétisé (3.66) soit vérifié quelles que soient leurs valeurs. Il vient donc

$$\sum_{j=1}^{\text{libres}} \mathbf{K}_{ij} \mathbf{q}_j = \mathbf{g}_i - \sum_{j=1}^{\text{fixes}} \mathbf{K}_{ij} \bar{\mathbf{u}}_j \quad (3.71)$$

où l'indice  $i$  prend les valeurs des degrés de liberté libres seulement. Dans cette équation, nous avons séparé les degrés de liberté du déplacement  $\mathbf{u}$  qui sont inconnus ( $\mathbf{q}_j$ ) de ceux qui sont fixés ( $\bar{\mathbf{u}}_j$ ). La propriété d'interpolation des fonctions de forme des éléments finis sert ici aussi pour que la fixation des degrés de liberté à la valeur du déplacement imposé conduise à  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  sur l'ensemble de  $\Gamma_u$ .

Le système linéaire (3.71) permet de déterminer les inconnues  $\mathbf{q}_j$  aux nœuds libres grâce à des équations qui sont bien aussi en nombre égal au nombre de nœuds libres. Une *matrice de raideur*  $\mathbf{K}$  est assemblée avec les sous-matrices  $\mathbf{K}_{ij}$  en vue de la résolution du système linéaire et un *vecteur de charge*  $\mathbf{g}$  est assemblé avec les  $\mathbf{g}_i$ . Nous constatons sur l'équation (3.68) que  $\mathbf{g}_i$  est non-nul uniquement sur le domaine où la

fonction de forme  $\phi_i$  est non-nulle, c'est-à-dire sur les éléments auxquels appartient le nœud  $i$ . De la même manière, nous constatons sur l'équation (3.67) que  $\mathbf{K}_{ij}$  est non-nul que si les fonctions de forme  $\phi_i$  et  $\phi_j$  sont simultanément non-nulles. Cela signifie que la matrice  $\mathbf{K}$  est creuse car la sous-matrice  $\mathbf{K}_{ij}$  n'est non-nulle que si les nœuds  $i$  et  $j$  appartiennent à un même élément. Cela signifie également que le maillage constitue une base parfaitement appropriée pour réaliser numériquement les intégrales présentes dans (3.67) et (3.68). Ces intégrales peuvent même être évaluées exactement en élasticité linéaire. L'intégration est réalisée en parcourant les éléments et en ajoutant la contribution de cet élément à  $\mathbf{g}$  pour tous les nœuds de l'élément courant et à  $\mathbf{K}$  pour toutes les paires de nœuds de l'élément courant.

### 3.2.2 Méthode sans maillage

La méthode sans maillage consiste à utiliser les fonctions de forme de l'approximation MLS (3.24), construites sans avoir recours à un maillage du domaine, dans la discrétisation de chacune des composantes du champ de déplacement et du champ de déplacement de test introduite dans le principe variationnel. Les équations (3.62) à (3.70) qui décrivent la méthode des éléments finis restent valables pour décrire la méthode sans maillage. Ce choix de fonctions de forme conduit à trois différences principales avec la méthode des éléments finis.

1. Comme les fonctions de forme MLS ne satisfont pas la propriété d'interpolation, les degrés de liberté  $\mathbf{q}_i$  ne sont pas les valeurs du déplacement aux nœuds. Par conséquent, les conditions aux limites essentielles ne se satisfont pas simplement en égalant les degrés de liberté des nœuds sur  $\Gamma_i$  aux valeurs qui y sont imposées. Différentes techniques pour satisfaire ces conditions aux limites sont abordées dans la section 3.3.
2. La matrice  $\mathbf{K}$  est davantage remplie que par la méthode des éléments finis. En effet, il y a une sous-matrice  $\mathbf{K}_{ij}$  non-nulle pour toutes les paires de supports qui ont une intersection et le nombre de ces intersections est plus élevé que pour la méthode des éléments finis pour que l'approximation soit correctement définie. Ce recouvrement plus important est illustré sur la figure 3.1 en début de chapitre.
3. Nous ne disposons pas du maillage comme support pour l'intégration dans le domaine. Cet aspect est abordé dans les sections 3.4 et 3.5.

## 3.3 Imposition des conditions aux limites essentielles

Dans les méthodes sans maillage, les fonctions de forme utilisées sont celles de l'approximation MLS. Comme nous l'avons vu, celles-ci ne valent pas 1 au nœud auquel elles sont associées. Pour cette raison, il n'est pas possible de fixer directement les valeurs des inconnues aux nœuds qui se trouvent sur la frontière  $\Gamma_u$ . Dans la méthode des éléments diffus initiale, Nayroles, Touzot et Villon (1992) prennent le parti de malgré tout fixer directement de cette manière les conditions aux limites essentielles en violation des hypothèses du principe variationnel. Différentes

méthodes sont proposées dans les articles ultérieurs. Nous passons en revue les plus importantes d'entre elles ci-dessous dans l'ordre chronologique de leur apparition.

### 3.3.1 Principe variationnel modifié avec des multiplicateurs de Lagrange supplémentaires

Cette méthode, proposée par Belytschko, Lu et Gu (1994), se base sur la forme faible suivante, où des multiplicateurs de Lagrange sont utilisés pour imposer les conditions aux limites sur le déplacement. Le sens physique des multiplicateurs de Lagrange est la réaction à la fixation.

Déterminer les déplacements  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ , les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon} \in H^0(\Omega)$ , les contraintes  $\boldsymbol{\sigma} \in H^0(\Omega)$  et les multiplicateurs de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda} \in H^0(\Omega)$  qui satisfont (2.7) et (2.9) et qui sont tels que le principe variationnel suivant est vérifié pour tout  $\delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$  et  $\delta\boldsymbol{\lambda} \in H^0(\Omega)$ .

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta\mathbf{u}^T : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\lambda} \, d\Gamma = 0 \quad (3.72)$$

Cette forme faible est discrétisée en utilisant une approximation MLS pour  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  comme ci-dessus et une interpolation pour le champ de multiplicateur de Lagrange (défini seulement sur  $\Gamma_u$ )

$$\boldsymbol{\lambda} = \sum_k \psi_k(s) \boldsymbol{\lambda}_k \quad (3.73)$$

$$\delta\boldsymbol{\lambda} = \sum_k \psi_k(s) \delta\boldsymbol{\lambda}_k \quad (3.74)$$

où les  $\psi_k$  sont des fonctions de forme d'interpolation dont la variable est la coordonnée curviligne  $s$  le long de  $\Gamma_u$ . En substituant les approximations dans le principe variationnel, nous aboutissons à un système linéaire qui permet de déterminer les inconnues  $\mathbf{q}_i$  et  $\boldsymbol{\lambda}_k$  :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

avec, comme précédemment,

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{D}] \mathbf{B}_j \, d\Omega \quad (3.76)$$

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Omega} \phi_i \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (3.77)$$

et, en plus,

$$\mathbf{G}_{ik} = - \int_{\Gamma_u} \phi_i \psi_k \mathbf{S} \, d\Gamma \quad (3.78)$$

$$\mathbf{h}_k = - \int_{\Gamma_u} \psi_k \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (3.79)$$

où  $\mathbf{S}$  est une matrice diagonale dont l'élément  $S_{ii}$  vaut 1 si le déplacement est imposé selon  $x_i$  et 0 sinon.

Remarquons que le système linéaire complet à résoudre est symétrique mais non défini positif.

### 3.3.2 Principe variationnel modifié sans multiplicateurs de Lagrange supplémentaires

Cette méthode, proposée par Lu, Belytschko et Gu (1994), repose sur la forme faible précédente où les multiplicateurs de Lagrange sont identifiés dès le début à la réaction à la fixation. Celle-ci s'énonce alors :

Déterminer les déplacements  $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$ , les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon} \in H^0(\Omega)$  et les contraintes  $\boldsymbol{\sigma} \in H^0(\Omega)$  qui satisfont (2.7) et (2.9) et qui sont tels que le principe variationnel suivant est vérifié pour tout  $\delta\mathbf{u} \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta\mathbf{u}^T : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{t} \cdot (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \, d\Gamma = 0 \quad (3.80)$$

avec  $\mathbf{t} = (\mathbf{D} : \nabla_s \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$  et  $\delta\mathbf{t} = (\mathbf{D} : \nabla_s \delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ .

En substituant les approximations dans le principe variationnel, nous aboutissons à un système linéaire qui permet de déterminer les inconnues  $\mathbf{q}_i$

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (3.81)$$

avec

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{D}] \mathbf{B}_j \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \left( \phi_i \mathbf{S} [\mathbf{N}] [\mathbf{D}] \mathbf{B}_j + \mathbf{B}_i^T [\mathbf{D}]^T [\mathbf{N}]^T \mathbf{S} \phi_j \right) \, d\Gamma \quad (3.82)$$

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{b} \, d\Omega - \int_{\Gamma_u} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{D}]^T [\mathbf{N}]^T \mathbf{S} \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (3.83)$$

où  $\mathbf{N}$  est donné par (2.18b) à deux dimensions et (2.22b) à trois dimensions.

Le système linéaire à résoudre est plus petit que par la méthode précédente. La matrice est encore symétrique non définie positive (contrairement à ce qu'écrivent Lu, Belytschko et Gu).

### 3.3.3 Principe variationnel modifié avec une pénalité

Cette méthode, proposée par Belytschko, Gu et Lu (1994), consiste à ajouter un terme de pénalité à la forme faible :

$$\int_{\Omega} \nabla_s \delta\mathbf{u}^T : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{b}} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta\mathbf{u} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma - \frac{\beta}{2} \delta \left( \int_{\Gamma_u} \|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}\|^2 \, d\Gamma \right) = 0 \quad (3.84)$$

qui conduit au système linéaire habituel

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (3.85)$$

avec

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{D}] \mathbf{B}_j \, d\Omega - \beta \int_{\Gamma_u} \phi_i \phi_j \, d\Gamma \quad (3.86)$$

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{b} \, d\Omega - \beta \int_{\Gamma_u} \phi_i \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad (3.87)$$

Il faut bien entendu faire un compromis sur la valeur de  $\beta$  : trop élevé, le système est mal conditionné ; trop faible, la condition sur le déplacement n'est pas précisément imposée.



### 3.3.4 Connexion à un maillage éléments finis

Krongauz et Belytschko (1996) proposent une méthode couplée entre la méthode sans maillage et la méthode des éléments finis. Dans une région du domaine, le déplacement est approximé à l'aide des fonctions de forme MLS et dans une autre, il est approximé par les fonctions de forme des éléments finis. Une couche de transition est nécessaire pour garantir la continuité du déplacement. Le déplacement  $y$  est approximé par  $R.u_{\text{sans maillage}} + (1 - R).u_{\text{éléments finis}}$  où  $R$  est une fonction rampe variant de 0 à 1 de la région éléments finis à la région sans maillage. Si la frontière  $\Gamma_u$  borde uniquement la région éléments finis, les conditions essentielles peuvent être imposées comme dans la méthode des éléments finis. Cette technique est aussi utile pour limiter la région sans maillage, où le calcul est plus coûteux, à la région où l'on souhaite profiter des avantages que cette méthode offre (par exemple là où se trouvent des fissures).

### 3.3.5 Propriété d'interpolation grâce à des fonctions de forme singulières

Pour obtenir la propriété d'interpolation  $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$  qui permet d'égaliser directement les degrés de liberté aux déplacements imposés, Kaljević et Saigal (1997) proposent d'utiliser des fonctions poids singulières telles que

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_i} w_i(\mathbf{x}) = \infty \quad (3.88)$$

Nous constatons directement sur les fonctions de forme de Shepard (3.34) que nous avons bien

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_i} \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.89)$$

dans ce cas puisque le poids au numérateur croît vers l'infini de manière égale la somme des poids au dénominateur. Il est aisé de vérifier que c'est aussi le cas pour les fonctions de forme générales (3.24). L'inconvénient de cette méthode est la perte de continuité des dérivées des fonctions de forme.

## 3.4 Intégration

Le calcul de la matrice de raideur  $\mathbf{K}$  et du vecteur de charge  $\mathbf{g}$  par les formules ci-dessus demande l'évaluation de certaines intégrales. Des intégrales sur certains contours sont nécessaires pour la contribution des forces de surface au vecteur de charge et, éventuellement, pour la contribution à la matrice de raideur de l'imposition des conditions aux limites essentielles selon la méthode choisie. Une intégrale sur le domaine est nécessaire pour la contribution des forces de volume au vecteur de charge et pour la contribution principale à la matrice de raideur en  $\int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Omega$ . Les intégrations sur le contour s'évaluent numériquement sans difficulté puisqu'une description des frontières est connue, que ce soit de manière analytique ou comme sortie d'un outil de CAO. Il est aisé de découper les frontières en petits intervalles sur lesquels une intégration de Gauss est réalisée. À deux dimensions, les intervalles sont des morceaux de courbe sur lesquels une intégration de Gauss simple est réalisée

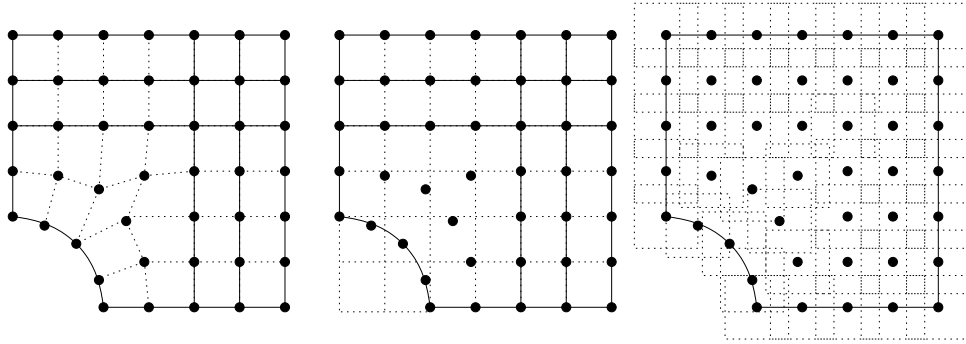


FIG. 3.9 – Intégration

alors qu'à trois dimensions, les intervalles sont des morceaux de surface sur lesquels une intégration de Gauss double est réalisée.

L'évaluation numérique des intégrales sur le domaine est moins aisée. En effet, nous connaissons seulement la pièce par la description de ses frontières à l'intérieur desquelles un ensemble de nœuds est distribué. Au contraire de la méthode des éléments finis, nous ne possédons pas le maillage utilisé pour construire les fonctions de forme et qui convient en plus naturellement comme base pour intégrer, en réalisant une intégration de Gauss sur chaque élément. Les deux méthodes d'intégration les plus communes sont présentées à gauche et au milieu de la figure 3.9 dans le cas bidimensionnel. À gauche, une découpe de la pièce en cellules est effectuée et une intégration de Gauss est réalisée sur chaque cellule. Sur cette figure, la découpe illustrée est celle d'un maillage d'éléments finis construit sur l'ensemble des nœuds de l'approximation MLS. Ainsi, la densité des points de Gauss sera plus élevée là où l'espacement nodal local est faible, autrement dit là où les intégrandes varient le plus rapidement. Il s'agit de la manière de procéder habituellement utilisée mais il faut préciser que la découpe en cellules ne doit pas nécessairement satisfaire les mêmes exigences qu'un maillage en éléments finis. Au milieu de la figure est illustrée une deuxième technique qui consiste à utiliser une division uniforme en cellules carrées dans laquelle est incluse la pièce. L'intégration de Gauss est réalisée sur chaque cellule en attribuant un poids nul aux points de Gauss qui se trouvent en-dehors de la pièce. Plutôt que d'utiliser des cellules uniformes, nous pourrions aussi partir du *quadtree* construit précédemment et réaliser une intégration de Gauss sur chacun des carrés disjoints dont l'union recouvre la pièce.

Dans nos études de fissuration, nous utiliserons simplement la technique illustrée à gauche mais, comme nous l'expliquerons aux sections 4.4 et 6.4, la découpe en cellules sera simplement conforme aux frontières extérieures et pas aux fissures, qui seront autorisées à couper les cellules. Notre méthode n'est donc pas strictement libre de tout maillage mais plutôt sans *remaillage* puisque la même découpe sera utilisée à chaque pas de la propagation. À droite de la figure 3.9 est illustrée une technique que nous avons développée. Celle-ci est rigoureusement sans maillage et est décrite à la section suivante.

## 3.5 Méthode strictement sans maillage avec une quadrature MLS

Cette section du chapitre 3 explique une méthode strictement sans maillage (*truly meshless method*) qui utilise un schéma de quadrature différent de celui basé sur une découpe en cellules du domaine. Cette section n'est pas indispensable à la compréhension du reste de la thèse car nous choisirons une découpe en cellules pour les problèmes de propagation de fissures qui sont le sujet principal de la thèse. Nous présentons toutefois cette brève digression car il s'agit d'une contribution originale que nous avons apportée au début de nos recherches. Elle a été présentée à l'*International colloquium in mechanics of solids, fluids, structures and interactions* à Nha Trang au Vietnam (Duflot et Nguyen-Dang, 2000) puis publiée dans *Communications in Numerical Methods in Engineering* (Duflot et Nguyen-Dang, 2002c). Deux applications de la méthode figurent dans ces articles.

### 3.5.1 Aperçu des méthodes strictement sans maillage

D'autres méthodes strictement sans maillage ont été proposées. Plusieurs d'entre elles reposent sur une intégration nodale : l'intégration sur le domaine est approximée par la somme des produits des intégrandes aux nœuds par un certain poids qui représente la surface « occupée » par ce nœud. Cette méthode simple souffre de deux inconvénients. D'abord, l'attribution d'un poids à chaque nœud est floue et ensuite la solution présente des oscillations spatiales qui proviennent de la sous-intégration. Beissel et Belytschko (1996) d'une part et Nagashima (1999) d'autre part proposent d'ajouter des termes de stabilisation qui lissent ces oscillations mais leurs techniques peuvent se révéler coûteuses car elles demandent les dérivées d'ordre supérieur des fonctions de forme. Une méthode *smooth particle hydrodynamics* corrigée par Bonet et Kulasegaram (2000) permet la stabilisation de la solution sans nécessiter ces dérivées d'ordre supérieur. Deux autres méthodes strictement sans maillage sont proposées par Atluri et Zhu (2000). Toutes les deux utilisent une forme faible non-Galerkin, où l'ensemble des fonctions de forme diffère de l'ensemble des fonctions d'essai. Leur inconvénient est donc de conduire à des matrices de raideur non-symétriques contrairement à la technique que nous décrivons ci-dessous. La première est appelée la méthode *local boundary integral equation* qui ne demande une intégration que sur un petit chemin entourant les nœuds. La deuxième est appelée la méthode *local Petrov-Galerkin* qui demande une intégration sur des sous-domaines entourant les nœuds. Pour sa part, la méthode des sphères finies de De et Bathe (2001) consiste en l'intégration sur l'intersection de chaque paire de supports circulaires séparément. Le nombre de points de Gauss nécessaires est un ordre de grandeur supérieur à celui des autres méthodes et de la méthode que nous développons ci-dessous. De manière semblable, Dolbow et Belytschko (1999a) intègrent sur toutes les intersections de paire de supports mais en prenant des supports rectangulaires et en choisissant des tailles telles que les bords de certains supports coïncident. Cette restriction fait que la méthode ne peut pas vraiment être qualifiée de strictement sans maillage.

De manière simultanée et indépendante, Carpinteri, Ferro et Ventura (2002) ont

développé une méthode strictement sans maillage presque identique à la méthode décrite ci-dessous. Elle est baptisée quadrature par une partition de l'unité. Cette méthode est améliorée dans Carpinteri, Ferro et Ventura (2003) pour tenir compte de la présence de fissures. Enfin, récemment, un article de Zhang *et al.* (2004), qui cite nos travaux, décrit une méthode semblable qui tient elle aussi compte de la présence de fissures.

### 3.5.2 Quadrature MLS

Nous cherchons à intégrer une fonction  $f(\mathbf{x})$  sur un domaine  $\Omega$ . À cette fin, nous considérons un ensemble de  $l$  fonctions  $\psi_k(\mathbf{x})$  qui vérifient les propriétés suivantes :

1. un support  $\Omega_k$  est associé à chaque  $\psi_k$  et est tel que  $\psi_k(\mathbf{x}) = 0$  si  $\mathbf{x} \notin \Omega_k$  ;
2. l'union des supports recouvre le domaine :  $\Omega \subset \bigcup_{k=1}^l \Omega_k$  ;
3. l'ensemble des fonctions réalisent une partition de l'unité :  $\sum_{k=1}^l \psi_k(\mathbf{x}) = 1$   $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

Nous notons que les supports  $\Omega_k$  peuvent se chevaucher ou non. Grâce à cet ensemble de fonctions, nous avons

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\Omega = \sum_{k=1}^l \int_{\Omega \cap \Omega_k} \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (3.90)$$

et nous obtenons une estimation de l'intégrale de  $f(\mathbf{x})$  sur  $\Omega$  en réalisant une quadrature de Gauss des fonctions  $\psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$  sur les sous-domaines  $\Omega \cap \Omega_k$  ( $k = 1, 2, \dots, l$ ) et en faisant la somme de ces contributions.

D'un point de vue pratique, il est recommandé de choisir une géométrie simple pour les  $\Omega_k$ , de sorte que la quadrature est aisée à réaliser sur ces supports (ou leur intersection avec  $\Omega$  pour ceux qui sont coupés par la frontière).

La technique d'intégration habituelle peut être vue comme un cas particulier de cette technique : les  $\Omega_k$  sont les cellules d'une division de  $\Omega$  et  $\psi_k(\mathbf{x}) = 1$  si  $\mathbf{x} \in \Omega_k$  et 0 sinon. Les trois propriétés sont bel et bien vérifiées et l'intégrale de  $f(\mathbf{x})$  est simplement estimée par la somme des quadratures de  $f(\mathbf{x})$  sur les différentes cellules de la division de  $\Omega$ .

Une autre possibilité est de prendre un ensemble de fonctions de forme MLS. Nous baptisons cette procédure *moving least squares quadrature* (MLSQ).<sup>3</sup> La première propriété est vérifiée puisque une fonction de forme MLS est nulle en-dehors de son support. Si l'ensemble des fonctions de forme MLS est bien défini, il y a au moins  $m$  fonctions  $\psi_k$  non-nulles à chaque point, où  $m$  est le nombre de fonctions de la base ; ainsi, la deuxième propriété est vérifiée. La dernière propriété est aussi vérifiée par la propriété de consistance de l'approximation MLS, puisque la fonction constante est toujours présente dans l'ensemble des fonctions de base  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ . Le choix le plus efficace en temps de calcul est de prendre les fonctions de forme de

<sup>3</sup>La méthode développée indépendamment par Carpinteri, Ferro et Ventura (2002) est baptisée *partition of unity quadrature*. Le nom que nous avons donné à la méthode nous semble plus descriptif que cette autre dénomination car la technique d'intégration traditionnelle est elle aussi un cas particulier de quadrature par partition de l'unité.

Shepard (3.34). Par simplicité, nous choisissons aussi des fonctions poids définies sur un rectangle (3.41). L'intégration sur des rectangles (resp. des parallélépipèdes à 3D) est en effet plus simple que l'intégration sur des disques (resp. des sphères). Pour traiter les frontières courbes, le plus simple est d'intégrer sur le support rectangulaire  $\Omega_k$  et de donner un poids nul aux points de quadrature hors de  $\Omega$ . Cela revient à utiliser l'équation suivante :

$$\int_{\Omega \cap \Omega_k} \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \, d\Omega = \int_{\Omega_k} \psi_k(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \delta_\Omega(\mathbf{x}) \, d\Omega \quad (3.91)$$

où

$$\delta_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (3.92)$$

Il est préférable toutefois d'utiliser plus de points d'intégration sur les supports coupés par la frontière que les autres.

Après cette description de la méthode d'intégration MLS pour une fonction quelconque, nous nous intéressons au cas des intégrales

$$\mathbf{K}_{ij}^{\text{domaine}} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j \, d\Omega \quad (3.93)$$

et

$$\mathbf{g}_i^{\text{domaine}} = \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{b} \, d\Omega \quad (3.94)$$

Pour éviter de longues répétitions, nous notons dans la suite  $\Phi$  l'ensemble des fonctions de forme  $\phi_i(\mathbf{x})$  utilisées pour l'approximation MLS et  $\Psi$  l'ensemble des fonctions de forme  $\psi_k(\mathbf{x})$  utilisé par la quadrature MLS.

Les  $\phi_i$  et leurs dérivées apparaissent dans les intégrales (3.93) et (3.94). En conséquence, nous prenons en compte la répartition des nœuds et la taille des domaines d'influence de l'ensemble  $\Phi$  pour construire  $\Psi$ . Plus précisément, nous décidons que les nœuds des deux ensembles coïncident et que la taille des supports rectangulaires de  $\Psi$  dépend du rayon d'influence du nœud correspondant de  $\Phi$  : les supports de  $\Psi$  doivent être suffisamment grands pour couvrir  $\Omega$ , mais nous les choisissons suffisamment petits de sorte qu'un support de  $\Psi$  est inclus dans le domaine d'influence correspondant de  $\Phi$ . Nous sommes autorisés à prendre des plus petits supports pour  $\Psi$  que pour  $\Phi$  car chaque point ne doit être couvert que par au moins un support de  $\Psi$  (Shepard : base de taille 1) alors qu'il doit être couvert par au moins trois supports de  $\Phi$  (base linéaire de taille 3 à deux dimensions). Une illustration est fournie sur la figure 3.10 où la frontière du domaine est tracée en gras, quelques nœuds dans le domaine sont représentés qui sont les centres des supports des  $\phi$  circulaires (en pointillés) et des  $\psi$  rectangulaires qui y sont inclus (en traits pleins) .

Le coût supplémentaire de cette nouvelle technique d'intégration permettant d'obtenir une méthode strictement sans maillage est faible par rapport à la méthode sans maillage classique car :

- $\Psi$  utilise une approximation de Shepard (3.34) moins coûteuse que les autres approximations (3.24), comme celle utilisée par  $\Phi$  ;
- les dérivées des fonctions de forme de  $\Psi$  ne sont pas demandées comme celles de  $\Phi$  ;

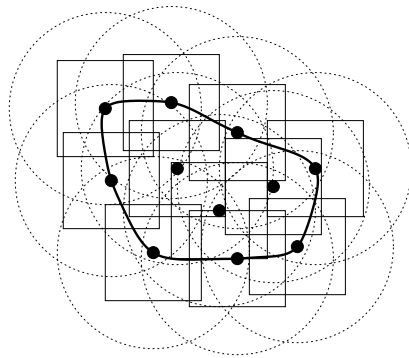


FIG. 3.10 – Quadrature MLS

- en un point donné, le calcul des fonctions de forme de  $\Psi$  est fait après celui de  $\Phi$  et il est alors aisé de déterminer les nœuds de  $\Psi$  qui influencent le point courant car il n'est nécessaire de rechercher ceux-ci que parmi les nœuds de  $\Phi$  qui influencent le point (puisque les supports de  $\Psi$  sont inclus dans les supports de  $\Phi$  correspondants).

La différence entre la méthode de Carpinteri, Ferro et Ventura (2002) et celle décrite ci-dessus est qu'ils prennent l'ensemble  $\Psi$  identique à  $\Phi$ . Notre méthode nous semble plus efficace car elle ne demande pas d'intégrations sur des disques, gourmandes en points d'intégration.

### 3.5.3 Conclusions

La méthode strictement sans maillage que nous avons présentée est simple et le fait de pouvoir rigoureusement s'affranchir de l'aide d'un maillage est plaisant. Nous montrons dans Duflo et Nguyen-Dang (2002c) un cas d'une distribution fortement irrégulière de nœuds concentrés autour d'une pointe de fissure où la quadrature MLS a un certain intérêt. La méthode pourrait certainement se montrer efficace en association avec une méthode adaptative où des nœuds sont ajoutés à l'approximation MLS dans certaines régions en fonction d'un indicateur local d'erreur : en utilisant une quadrature MLS qui s'adapte de manière correspondante, les points d'intégration se concentreraient eux aussi automatiquement dans les régions de gradients élevés. Toutefois, dans le reste de la thèse, nous n'utilisons pas cette technique car nous développons à la section 4.3 un enrichissement des fonctions de forme qui nous permet précisément de ne pas avoir à utiliser de telles distributions fortement concentrées de nœuds.

## 3.6 Résumé

Nous résumons ce chapitre en décrivant un programme complet de résolution d'un problème par la méthode sans maillage. Les étapes sont les suivantes.

**Données** Les informations à fournir en entrée sont

- les propriétés matérielles  $E$  et  $\nu$ ;

- la position de chaque nœud et la fonction poids associée, décrite par sa forme (par exemple circulaire), sa taille (valeur du rayon) et son aspect (par exemple une spline d'ordre 4) ;
- les coordonnées des points d'intégration et leur poids, obtenus par une des trois méthodes illustrées sur la figure 3.9 ;
- l'équation des forces de volume  $\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{x})$  ;
- l'équation des frontières et la nature et l'équation des conditions limites qui y sont appliquées  $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  ou  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  ;
- les coordonnées et les poids des points d'intégration sur les frontières.

**Pré-traitement** Avant de commencer le calcul, l'arbre qui permet la sélection rapide des nœuds est construit par la technique expliquée à la section 3.1.6. Le carré initial qui contient la pièce est choisi en se basant sur les coordonnées extrêmes parmi les points d'intégration. Ensuite, la matrice  $\mathbf{K}$  et le vecteur  $\mathbf{g}$  sont initialisés à 0. Si une méthode de stockage de type creux (où seuls les éléments non-nuls sont alloués) est utilisée, il convient de réserver dans  $\mathbf{K}$  une sous-matrice  $K_{ij}$  si les domaines des nœuds  $i$  et  $j$  ont une intersection. Enfin, les produits dyadiques  $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)$  sont calculés une fois pour toutes et mémorisés à chaque nœud, comme expliqué à la section 3.1.6.

**Intégration sur le domaine** Pour chaque point d'intégration sur le domaine  $\mathbf{x}_g$  de poids  $w_g$ , les fonctions de forme et leurs dérivées premières sont calculées. Ce calcul fait intervenir l'arbre pour déterminer les nœuds candidats au point courant, dont le poids et ses dérivées premières sont évalués. L'algorithme est décrit à la page 42. Pour chaque fonction de forme non-nulle, une contribution  $\phi_i \bar{\mathbf{b}} w_g$  est ajoutée à  $\mathbf{g}_i$ . Pour chaque paire de fonctions de forme non-nulles, une contribution  $\mathbf{B}_i \mathbf{D} \mathbf{B}_j w_g$  est ajoutée à  $\mathbf{K}_{ij}$  (avec  $\mathbf{B}_i = [\nabla] \phi_i$ ).

**Intégration sur les frontières** Pour chaque point d'intégration sur  $\Gamma_t$ , les fonctions de forme sont calculées, toujours à l'aide de l'arbre, et une contribution pondérée par le poids d'intégration est ajoutée aux  $\mathbf{g}_i$  des nœuds où celles-ci sont non-nulles. Si un principe variationnel modifié sans multiplicateur de Lagrange est utilisé par exemple, les fonctions de forme et leurs dérivées premières sont calculées pour chaque point d'intégration sur  $\Gamma_u$  et une contribution ajoutée à  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{g}$ .

**Résolution du système linéaire** Le système linéaire est résolu pour obtenir les inconnues nodales  $\mathbf{q}_i$ . Une méthode itérative pour résoudre un système symétrique non-défini positif creux est l'algorithme SYMMLQ de Paige et Saunders (1975).

**Sorties** En sortie, le programme fournit les déplacements, déformations et contraintes aux points demandés. Pour ce faire, en chacun de ces points, il faut à nouveau utiliser l'arbre pour calculer les fonctions de forme et leurs dérivées premières. Le déplacement estimé s'obtient en additionnant  $\phi_i \mathbf{q}_i$  pour toutes les fonctions de forme non-nulles. La déformation estimée s'obtient en additionnant  $\mathbf{B}_i \mathbf{q}_i$  et la contrainte en multipliant la déformation par la matrice de Hooke.





# Chapitre 4

## Méthode sans maillage en mécanique de la rupture à deux dimensions

Dans ce chapitre, nous présentons les modifications à apporter à la méthode sans maillage décrite au chapitre précédent en présence de fissures dans le cas bidimensionnel et expliquons la méthode de simulation de propagation de celles-ci. Nous détaillons dans l'ordre l'introduction de la discontinuité des fonctions de forme le long des fissures à la section 4.1, la distribution nodale sur laquelle sont construites ces fonctions de forme à la section 4.2, l'enrichissement de l'approximation à la section 4.3, le schéma d'intégration à la section 4.4, la technique de calcul des facteurs d'intensité de contrainte à la section 4.5 et enfin le modèle de propagation des fissures à la section 4.6.

### 4.1 Représentation des fissures

À deux dimensions, nous représentons une fissure par une ligne brisée. Notre modèle de la fissure est donc linéaire par morceaux. La fissure initiale est généralement un segment de droite. Au cours de notre simulation de la propagation, des segments de droite sont ajoutés aux deux pointes de la fissure dans le cas d'une fissure intérieure et à la seule pointe de la fissure dans le cas d'une fissure débouchante.

Une fissure dans un solide constitue une frontière interne de part et d'autre de laquelle le déplacement est discontinu. Il s'agit d'une discontinuité géométrique (par opposition aux discontinuités matérielles que sont les frontières entre des matériaux différents). Pour obtenir une bonne solution approchée, il est indispensable de chercher une approximation qui reprend cette discontinuité. Avant d'expliquer la technique par laquelle la discontinuité est introduite dans la méthode sans maillage, nous passons en revue le cas des autres méthodes numériques.

Dans la méthode des éléments finis classique, le maillage respecte les frontières internes et les nœuds présents sur la fissure sont dédoublés de telle sorte que les fonctions de forme de chacun des nœuds ne sont non-nulles que d'un côté de la fissure. Les degrés de liberté associés à chacun des nœuds sont les composantes du déplacement du point de ce côté de la fissure. Le déplacement est discontinu car,

par construction d'un maillage conforme à la fissure, aucune des fonctions de forme intervenant dans l'approximation

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i \quad (4.1)$$

ne s'étend des deux côtés de la fissure

Dans la méthode des éléments finis étendue, le maillage ne respecte pas les frontières internes et des degrés de liberté sont ajoutés à chaque nœud dont le support est coupé par la fissure. La fonction de forme associée est la fonction de forme normale multipliée par une fonction échelon qui change de signe de part et d'autre de la fissure. Le déplacement a pour expression

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{q}_i + \sum_j \phi_j(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}) \mathbf{b}_j \quad (4.2)$$

où la deuxième somme se fait sur les nœuds appartenant à un élément coupé et où  $H$  vaut  $+1$  d'un côté et  $-1$  de l'autre. Les degrés de liberté  $\mathbf{b}_j$  reprennent le saut de déplacement. Cette technique développée à la base pour la méthode des éléments finis étendue a été utilisée par la suite dans le cadre des méthodes sans maillage par Ventura, Xu et Belytschko (2002).

Dans la méthode des éléments de frontière, le déplacement en un point intérieur est obtenu par intégration sur l'ensemble de la frontière d'une certaine fonction qui est singulière quand le point s'approche d'une frontière. Cette singularité fait apparaître naturellement une discontinuité lorsque l'on déplace le point à travers une frontière.

Dans la méthode sans maillage qui nous intéresse dans cette thèse, la discontinuité est introduite dans les fonctions de forme  $\phi$  par l'intermédiaire des fonctions poids  $w$ . En l'absence de frontières intérieures, la fonction poids associée à un nœud en un certain point croît avec la proximité du nœud. En quelque sorte, plus un point est proche d'un nœud, plus la valeur du déplacement  $y$  est influencée par le degré de liberté en ce nœud. En présence de frontières intérieures, la notion de proximité est modifiée pour tenir compte de celles-ci. Un effet d'écran est introduit dans l'influence qu'un nœud a sur un point si une frontière intérieure les sépare. Dans la suite de cette section, nous présentons les cinq méthodes pour prendre en compte cet effet présentes dans la littérature puis indiquons notre choix et détaillons son implémentation.

### 4.1.1 Critère de visibilité

La technique la plus simple pour imposer la discontinuité des fonctions poids à travers une fissure est de prendre un poids nul si le segment reliant le point d'évaluation et le nœud est coupé par la fissure. Cette technique a été proposée dès le premier article sur la méthode *element-free Galerkin* de Belytschko, Lu et Gu (1994). Ce critère porte ce nom car un nœud influence un point si ce point est *visible* depuis le nœud. Il est illustré sur la figure 4.1. Le domaine associé au nœud  $J$  est entièrement coupé par la fissure. Le poids associé passe de sa valeur normale à

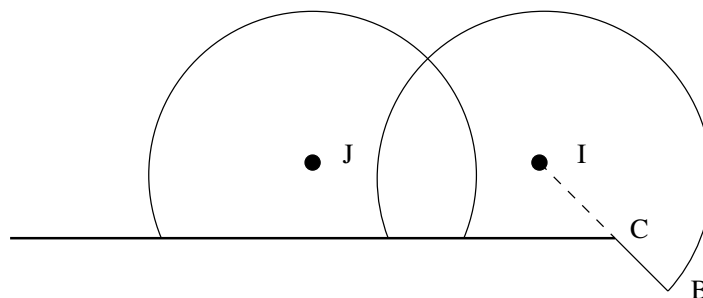


FIG. 4.1 – Domaines d'influence pour le critère de visibilité

zéro quand un point traverse la fissure. La discontinuité souhaitée dans le poids, qui se retrouvera dans la fonction de forme, est bien présente. Le domaine associé au nœud I est partiellement coupé par la fissure. Il y a une discontinuité supplémentaire par rapport au cas précédent le long de la ligne CB. Il résulte de cette discontinuité parasite des fonctions de forme des dérivées infinies dans les intégrations à effectuer pour calculer les éléments de la matrice de raideur. Même si Krysl et Belytschko (1997) ont prouvé que la convergence reste assurée en présence de ces discontinuités, Organ *et al.* (1996) ont montré que des solutions de meilleure qualité peuvent être obtenues en adoucissant ces sauts et ont proposé les deux critères suivants.

#### 4.1.2 Critère de diffraction

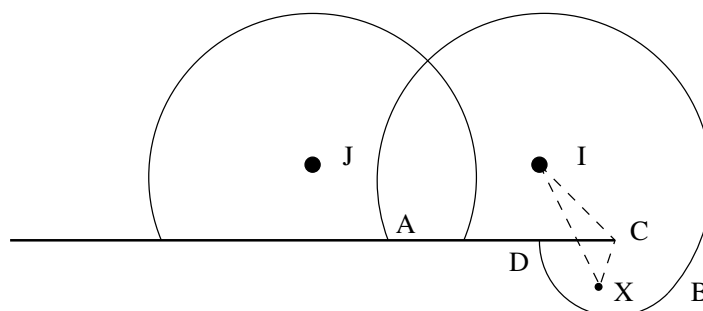


FIG. 4.2 – Domaines d'influence pour le critère de diffraction

Rappelons tout d'abord que nous utilisons des poids de la forme

$$w_i(\mathbf{x}) = f_4(s) \quad (4.3)$$

où  $f_4$  est la spline d'ordre 4 (3.39) qui s'annule pour  $s \geq 1$  et  $s$  est la distance normalisée

$$s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i} \quad (4.4)$$

avec  $\mathbf{x}_i$  les coordonnées du nœud  $I$  et  $d_i$  le rayon du support associé à ce nœud. Ce poids est bien circulaire car sa valeur en un point  $\mathbf{x}$  ne dépend que de la distance avec le nœud. Dans sa forme la plus simple, le critère de diffraction revient à allonger la distance entre un point et un nœud si le segment qui les joint est coupé par la

fissure en prenant comme  $s$  la longueur du chemin qui les relie en passant par la pointe de la fissure la plus proche, divisée par le rayon  $d_i$  :

$$s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| + \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_i\|}{d_i} \quad (4.5)$$

$\mathbf{x}_c$  sont les coordonnées de la pointe de la fissure. Ce critère est illustré sur la figure 4.2. Pour le nœud J, la fonction poids obtenue est la même que par le critère de visibilité. En effet, pour tous les points de l'autre côté de la fissure,  $\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_j\| > d_j$  et donc  $s > 1$ . Pour le nœud I, une fonction poids continue est obtenue, sauf au travers de la fissure, ce qui est le but poursuivi. Le contour du support est composé de deux arcs de cercles : un arc centré en I de rayon  $d_i$  allant de A à B et un arc centré en C de rayon  $d_i - \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_i\|$  allant de B à D. La dérivée de la fonction poids est discontinue le long de CB. Ce critère porte le nom de critère de diffraction car l'influence d'un nœud donne l'impression de s'enrouler en s'affaiblissant autour de la fissure de manière un peu semblable à la diffraction de la lumière.

Le critère ci-dessus est un cas particulier pour  $\lambda = 1$  du critère de diffraction complet proposé par Organ *et al.* (1996) :

$$s = \left( \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| + \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_i\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|} \right)^\lambda \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i} \quad (4.6)$$

Le paramètre  $\lambda$  permet le contrôle de la réduction du domaine derrière la fissure.

### 4.1.3 Critère de transparence

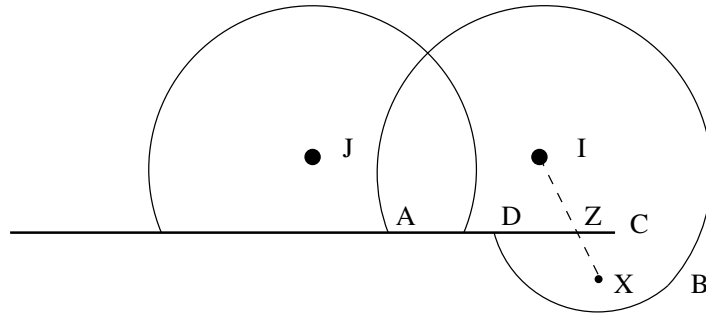


FIG. 4.3 – Domaines d'influence pour le critère de transparence

Le critère de transparence, proposé également par Organ *et al.* (1996), consiste à allonger la distance  $s$  d'une valeur qui est fonction de la distance entre la pointe de la fissure et le point d'intersection Z du segment reliant le nœud au point avec la fissure :

$$s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i} + f_t(\|\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_c\|) \quad (4.7)$$

Le critère est illustré sur la figure 4.3. La fonction de transparence  $f_t$  est une fonction croissante, qui est nulle à la pointe de la fissure : la fissure y est « transparente ». Là où elle dépasse 1, elle est complètement « opaque ». En choisissant cette fonction

suffisamment régulière à l'origine, nous pouvons obtenir des poids dont la dérivée au passage de CB est continue. Le taux de croissance de cette fonction est choisi en fonction de l'influence souhaitée des nœuds de l'autre côté de la fissure. Fleming (1997) rapporte que cette méthode donne des poids variant trop fortement pour les nœuds situés près de la frontière.

#### 4.1.4 Modèle de la cale

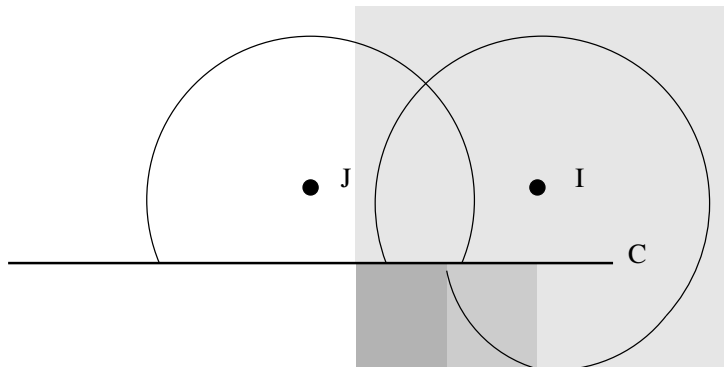


FIG. 4.4 – Domaines d'influence pour le modèle de la cale

Dans sa thèse, Hegen (1997) propose le *wedge model*, soit modèle de la cale. Les fonctions poids sont directement multipliées par une fonction inférieure à 1, décroissante plus le point d'évaluation et le nœud sont cachés l'un de l'autre. La fonction utilisée est illustrée à la figure 4.4 : elle vaut 1 dans la partie légèrement ombrée, elle décroît de 1 à 0 dans la partie moyennement ombrée et vaut 0 dans la partie plus fortement ombrée. Nous renvoyons à Hegen (1997) pour l'équation de cette fonction. Le nom du modèle vient de l'aspect que possède le graphique de cette fonction.

#### 4.1.5 Modèle de l'extension virtuelle de la fissure

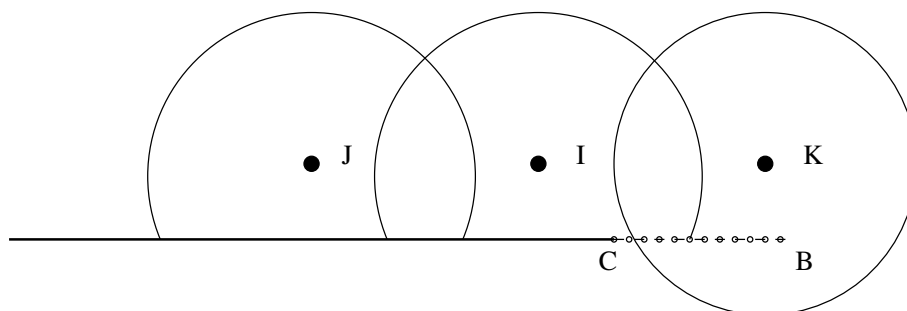


FIG. 4.5 – Domaines d'influence pour le modèle de l'extension virtuelle de la fissure

Dans ce modèle, proposé par Carpinteri, Ferro et Ventura (2001), la fissure est allongée par un incrément virtuel selon la tangente à la fissure à la pointe. Le poids des nœuds en un point est nul si le segment qui les joint est coupé par la fissure virtuelle

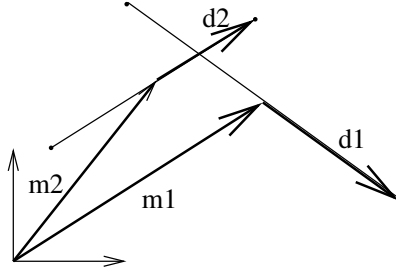


FIG. 4.6 – Vecteurs de position du milieu et vecteurs directeurs de deux segments

(formée de la fissure réelle et de l'incrément virtuel). Les autres poids ne sont pas modifiés. Sur la figure 4.5, les poids de I et J sont nuls en-dessous de la fissure prolongée virtuellement au contraire de K. L'approximation est alors discontinue le long de CB. Il convient alors d'imposer que le saut entre les déplacements et les déformations sur la lèvres supérieur et ceux sur la lèvres inférieur en plusieurs points de l'incrément virtuel est nul à l'aide de multiplicateurs lagrangiens. Pour obtenir un problème correctement posé malgré la présence d'un grand nombre de multiplicateurs lagrangiens, un nouveau principe variationnel, dit du Lagrangien augmenté, est présenté dans l'article sus-cité. Ce principe permet aussi d'imposer les conditions aux limites essentielles.

#### 4.1.6 Choix du critère et implémentation

Dans nos recherches, nous avons utilisé les trois premiers critères présentés et nous avons conclu en faveur du modèle simple et efficace de diffraction avec  $\lambda = 1$ , en accord avec les observations de Fleming (1997). Contrairement au modèle de visibilité, ce modèle est continu dans tout le domaine tout en conservant la discontinuité souhaitée le long de la fissure. Le modèle de transparence pour sa part présente l'inconvénient de conduire à des fonctions de forme variant brutalement, proche d'une discontinuité, pour les nœuds proches de la frontière : en effet, ceux-ci présentent une variation spatiale rapide de la fonction de transparence au début de celle-ci.

Pour mettre en œuvre ce critère, la fonction à implémenter est essentiellement celle qui fait le décompte du nombre d'intersections entre le segment nœud-point d'évaluation et la ligne brisée qui représente la fissure. Pour déterminer si un segment nœud-point et un segment de la fissure s'intersectent, il faut que les deux conditions suivantes soient simultanément vérifiées :

$$\|(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{d}_1\| \leq \|\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2\| \quad (4.8)$$

$$\|(\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2) \wedge \mathbf{d}_2\| \leq \|\mathbf{d}_1 \wedge \mathbf{d}_2\| \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{m}_1$  et  $\mathbf{d}_1$  (resp.  $\mathbf{m}_2$  et  $\mathbf{d}_2$ ) sont le vecteur de position du milieu et le vecteur directeur du premier (resp. second) segment (figure 4.6).

Les différents cas sont illustrés sur la figure 4.7. Si le nombre d'intersections est impair comme pour IX, le nœud et le point sont de deux côtés différents de la fissure et il faut utiliser la distance modifiée ICX. S'il est nul comme pour IY ou pair comme pour JY, nous conservons la vraie distance. Belytschko *et al.* (1996b) estiment que

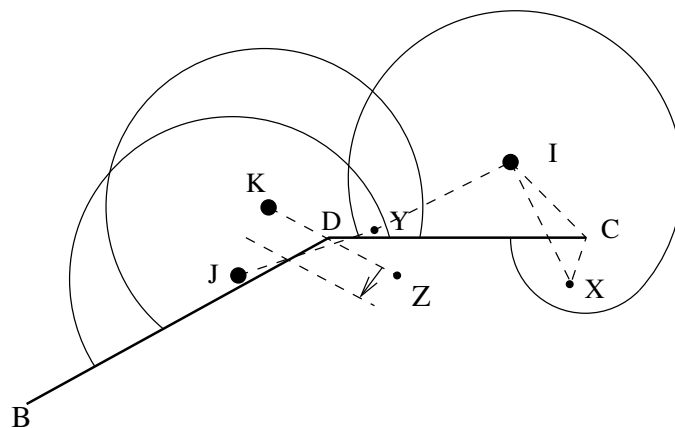


FIG. 4.7 – Domaines d'influence autour d'une fissure avec un angle

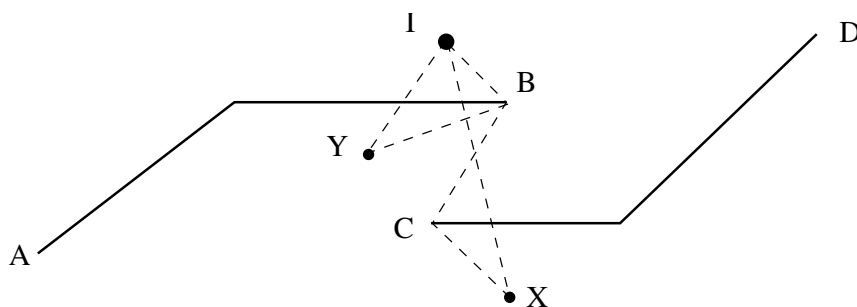


FIG. 4.8 – Chemins en présence de plusieurs fissures

dans le cas JY, il faut allonger la distance et utiliser la distance modifiée JDY. Selon nous, cela ne change pratiquement rien et nous n'avons observé aucun intérêt à le faire.

Il y a un cas limite qui demande de prendre une précaution particulière : avant de parcourir les segments de la ligne brisée en comptant les intersections, il faut vérifier si le segment nœud-point ne passe pas juste sur un des angles de la ligne brisée comme pour KZ. Si c'est le cas, l'algorithme risque de compter aucune ou deux intersections selon le hasard des arrondis numériques plutôt que le nombre réel qui est une intersection. Déplacer le segment KZ d'une petite distance (exagérée sur la figure) perpendiculairement à son vecteur directeur avant de compter les intersections dans ce cas résout ce cas pathologique. Si c'était un segment comme JY qui passait sur D, le déplacement du segment vers le haut ne donnerait aucune intersection et vers le bas donnerait deux intersections et quel que soit le choix, l'algorithme détecte bien que J et Y sont du même côté de la fissure.

Si le nombre d'intersections est impair, il reste encore à déterminer quelle pointe de fissure doit intervenir dans le calcul de la distance modifiée. Il faut prendre naturellement celle qui minimise cette distance modifiée, soit sur la figure 4.8, la pointe B dans le cas de IY et non A. Pour les fissures débouchantes, il n'y a qu'une pointe et la question ne se pose pas.

S'il y a plusieurs fissures, il faut compter le nombre d'intersections avec chaque fissure séparément. La distance modifiée est la longueur du chemin qui va du nœud au point en passant par une pointe de toutes les fissures qui sont coupées un nombre

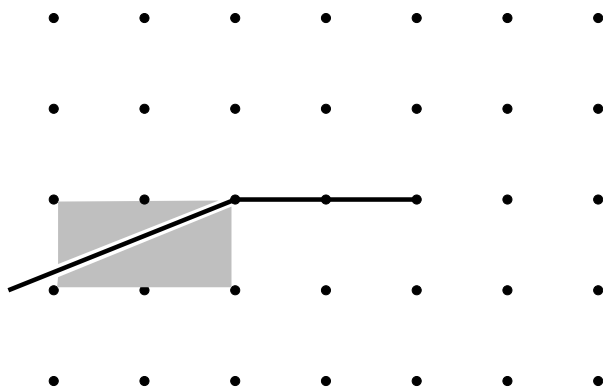


FIG. 4.9 – Distribution nodale régulière de base

impair de fois, en choisissant les pointes et leur ordre dans le chemin de sorte que la distance soit la plus courte. Sur la figure 4.8, IY ne coupe qu'une fissure et la distance à utiliser est celle du chemin IBY alors que IX coupe les deux fissures et la distance à utiliser est celle du chemin IBCX, qui est plus court que ICBX et que tous les chemins qui passent par A ou D.

Pour optimiser l'implémentation du critère de diffraction, il est bon, avant chaque pas de la simulation de la propagation, de marquer les nœuds dont le domaine est coupé par une fissure. C'est le cas si la distance entre le nœud et la fissure (la plus courte des distances entre le nœud et les différents segments de la ligne brisée) est inférieure au rayon. De la sorte, à chaque point d'évaluation des fonctions de forme, lorsque l'on évalue les différentes fonctions poids à l'étape 3 de l'algorithme de la page 42, il n'est nécessaire de déterminer si la distance nœud-point d'évaluation doit être modifiée que pour les nœuds marqués.

## 4.2 Distribution nodale

La distribution des nœuds dans le domaine utilisée pour une simulation de propagation de fissures par une méthode sans maillage est en général régulière. Les nœuds sont placés aux intersections d'une grille d'espacement constant. Ce choix est fait car nous ne voulons pas supposer à l'avance où la fissure va se propager pour y densifier les nœuds. La distribution régulière présente l'avantage de simplifier l'intégration par l'utilisation de cellules alignées sur cette distribution au sein desquelles une quadrature de Gauss est réalisée (voir 4.4). En outre, la distribution régulière simplifie le choix du rayon des supports. Il est garanti que chaque point est recouvert par au moins trois supports s'il est supérieur à l'espacement nodal. Quelques ajouts à la distribution nodale régulière de base sont nécessaires pour que la méthode fonctionne correctement.

D'abord, si un nœud est situé sur la fissure, que ce soit la fissure initiale ou un des incréments ajoutés au fil de la simulation, il convient de le dédoubler et de déplacer légèrement chacun des deux nœuds de chacun des côtés de la fissure dans la direction perpendiculaire à la fissure en ce point. Un nœud situé précisément sur la fissure ferait échouer la méthode expliquée à la section précédente pour introduire une discontinuité le long de la fissure. Cette modification de la distribution nodale



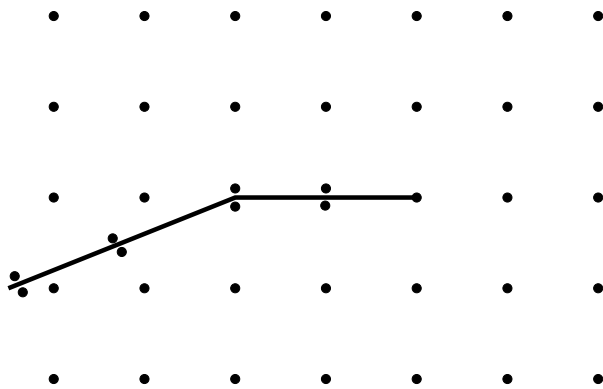


FIG. 4.10 – Distribution nodale régulière modifiée

est illustrée sur les figures 4.9 et 4.10 où les deux nœuds sur la partie horizontale de la fissure sont dédoublés.

Ensuite, il est bon d'ajouter quelques nœuds de chaque côté de la fissure. Sur la figure 4.9, il existe des zones, que nous avons ombrées, où l'approximation MLS est en fait une extrapolation. En un point proche de la fissure, au-dessus de celle-ci par exemple, les fonctions de forme des nœuds en-dessous sont nulles et si le rayon des nœuds au-dessus n'est pas suffisant, seules les fonctions poids de la première ligne ont une contribution ; l'approximation MLS est alors mal définie. En ajoutant quelques nœuds comme sur la partie oblique de la fissure sur la figure 4.10, cette région mal conditionnée disparaît. Dans notre expérience, cela améliore toujours la solution.

Enfin, la prise en compte du comportement du déplacement en  $\sqrt{r}$  à la pointe de la fissure dans l'approximation permet une amélioration significative de la solution. Ceci est le sujet de la section suivante.

### 4.3 Enrichissement en front de fissure

Pour simuler des problèmes de propagation de fissures, outre la difficulté de devoir traiter avec des frontières intérieures mobiles, existe la difficulté de devoir traiter avec un champ de contrainte singulier en front de fissure. Dans les premiers articles comme ceux de Belytschko, Gu et Lu (1994); Belytschko, Lu et Gu (1995); Belytschko *et al.* (1995), cette nécessité de bien représenter la singularité est gérée en raffinant la distribution nodale en front de fissure. Cet ajout de nœud dans la distribution régulière se fait simplement dans le cadre d'une méthode sans maillage alors qu'en élément fini, un ajout de nœuds demande une reconstruction du maillage. Quand la fissure se propage, l'arrangement nodal se déplace avec la pointe de la fissure à chaque pas de la propagation quasi-statique dans les trois articles sus-cités. Pour la propagation dynamique, dans Ponthot et Belytschko (1998), une formulation arbitraire lagrangienne-eulérienne est utilisée pour remplacer continûment les nœuds. Plus simplement mais bien plus inefficacement, une distribution fine dans l'ensemble du domaine est utilisée dans Lu, Belytschko et Tabbara (1995); Belytschko et Tabbara (1996); Tabbara et Stone (1998). Karutz, Chudoba et Krätzig (2002) utilisent un maillage d'éléments finis de base dont certains éléments sont remplacés de manière

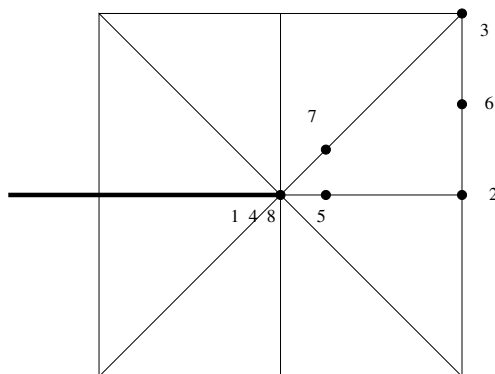


FIG. 4.11 – Élément fini singulier

automatique et adaptative par une distribution fine de nœuds d'une méthode sans maillage. Lee, Chung et Choi (2003) utilisent une méthode adaptative qui ajoute des nœuds au front de la fissure en fonction d'un estimateur d'erreur pour représenter précisément la singularité des contraintes.

Nous présentons dans cette section trois techniques pour représenter précisément la singularité des contraintes sans raffiner fortement la distribution nodale :

- l'enrichissement extrinsèque de Fleming *et al.* (1997) à la section 4.3.2 ;
- l'enrichissement à l'aide des fonctions de base de Fleming *et al.* (1997) également d'une part et de Rao et Rahman (2000) d'autre part à la section 4.3.3 ;
- l'enrichissement à l'aide des fonctions poids à la section 4.3.4, qui est une technique que nous avons développée et présentée dans DufLOT et Nguyen-Dang dans *Proceedings of ACOMEN* (2002), le numéro spécial suite à cette conférence de *Journal of Computational and Applied Mathematics* (2004a) et *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2004c).

Avant cela, pour comparer, nous débutons cette section par la présentation de la technique utilisée habituellement en éléments finis pour enrichir l'approximation en front de fissure.

### 4.3.1 Élément fini enrichi

La technique la plus utilisée dans la méthode des éléments finis pour prendre en compte la singularité des contraintes en front de fissure sans utiliser de maillage fortement raffiné est l'utilisation de l'élément singulier connu sous le nom de *quarter-point element* (Henshell et Shaw (1975); Barsoum (1976, 1977)). Illustré sur la figure 4.11, celui-ci est un élément quadrangulaire à 8 nœuds de type *serendip*, dégénéré en un triangle de sorte que les nœuds  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_4$ ,  $\mathbf{x}_8$  coïncident avec la pointe de la fissure et dont les nœuds  $\mathbf{x}_5$  et  $\mathbf{x}_7$  sont placés au quart de la longueur de leur côté. À cause de la dégénérescence, le jacobien de la transformation isoparamétrique est singulier à la pointe de la fissure. Comme les dérivées des fonctions de forme dans le repère globale sont reliées aux dérivées des fonctions de forme dans le repère de l'élément par l'intermédiaire de ce jacobien, nous obtenons des fonctions de forme singulières. Barsoum a montré que cette singularité présente un comportement en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  grâce à la position au quart du côté de  $\mathbf{x}_5$  et  $\mathbf{x}_7$ . Plus il y a d'éléments finis autour de la pointe de la fissure (8 sur la figure 4.11) mieux la variation angulaire en  $\sin \frac{\theta}{2}$ ,  $\cos \frac{\theta}{2}$

du type (2.41) est représentée.

### 4.3.2 Enrichissement extrinsèque de l'approximation MLS

Rappelons que, en état plan, le déplacement en front de fissure est donné par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = K_I \mathbf{Q}_I(\mathbf{x}) + K_{II} \mathbf{Q}_{II}(\mathbf{x}) \quad (4.10)$$

$$\mathbf{Q}_I(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{Q}_{II}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ -\kappa + 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

où nous avons regroupé les équations (2.41) et (2.49). La technique d'enrichissement extrinsèque consiste à rechercher une approximation du déplacement de la forme

$$\mathbf{u}_e^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n_c} [\mathbf{Q}_I^j(\mathbf{x}) k_I^j + \mathbf{Q}_{II}^j(\mathbf{x}) k_{II}^j] \quad (4.13)$$

où  $n_c$  est le nombre de pointes de fissure et  $k_I^j$  et  $k_{II}^j$  sont des degrés de liberté supplémentaires associés au mode I et II respectivement à la pointe  $j$ . L'introduction de cette approximation dans le principe variationnel est assez lourde et provoque une augmentation de la largeur de bande de la matrice de raideur car les deux lignes et colonnes ajoutées pour chaque pointe de fissure sont pleines : les fonctions  $Q$  sont en effet non-nulles dans tout le domaine et ont une interaction avec tous les degrés de liberté.

Pour réduire cette interaction, il est possible d'utiliser  $\mathbf{u}_e^h$  seulement dans un petit domaine entourant la pointe, l'approximation  $\mathbf{u}^h$  habituelle dans la région à plus grande distance avec une région de transition entre les deux. Dans la région de transition, le déplacement est approché par  $R\mathbf{u}_e^h + (1-R)\mathbf{u}^h$  où  $R$  est une fonction rampe qui varie de 1 à 0 de la région enrichie à la région non-enrichie.

L'enrichissement extrinsèque peut être limité dans une zone localisée autour de la pointe de la fissure en utilisant une approximation pour le déplacement donnée par

$$\mathbf{u}_e^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{j=1}^{n_c} \sum_{i=1}^M [\mathbf{Q}_I^j(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) q_{Ii}^j + \mathbf{Q}_{II}^j(\mathbf{x}) \phi_i(\mathbf{x}) q_{IIi}^j] \quad (4.14)$$

où on ajoute  $2M$  degrés de liberté à chaque pointe où  $M$  est le nombre de nœuds présents dans la région que l'on souhaite enrichir. Cette technique porte le nom de méthode de la partition de l'unité, voir Duarte et Oden (1996b) et Melenk et Babuška (1996). De cette manière, l'enrichissement est naturellement local puisque sans contribution en-dehors de l'union des  $M$  supports des nœuds concernés.

### 4.3.3 Enrichissement par les fonctions de base

#### Enrichissement complet de la base

L'enrichissement complet (intrinsèque) de la base consiste à utiliser le vecteur des fonctions de base suivant

$$\mathbf{p}^T = \left[ 1, x, y, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin(\theta) \right] \quad (4.15)$$

pour que l'approximation soit en mesure de reproduire exactement le champ de déplacement en front de fissure par la propriété de consistance de l'approximation MLS (aisément démontrable après quelques manipulations trigonométriques). Cette base est utilisée dans les équations de construction des fonctions de forme (3.21), (3.24) et (3.25). Cette méthode demande donc l'inversion d'une matrice  $7 \times 7$  en chaque point d'évaluation des fonctions de forme contre une inversion d'une matrice  $3 \times 3$  avec la base linéaire habituelle. Pour limiter ce surcoût de calcul, il est souhaitable à nouveau de limiter la taille de la zone enrichie et d'utiliser la base linéaire à grande distance de la pointe à condition d'utiliser une zone de transition pour garantir la continuité de l'approximation. La limitation de la zone enrichie est même indispensable s'il y a deux pointes de fissure ou plus pour ne pas devoir travailler avec une base de taille 11 ou plus.

Dans un article récent, Rao et Rahman (2004) utilisent un enrichissement complet de la base dans des simulations de problèmes de mécanique de la rupture non-linéaire. Les fonctions d'enrichissement à utiliser sont différentes. Pour des matériaux dont la relation entre les déformations et les contraintes est donnée par une loi de Ramsberg-Osgood

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} + \alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^n \quad (4.16)$$

la base utilisée est celle obtenue en remplaçant  $\sqrt{r}$  par  $r^{\frac{1}{n+1}}$  dans (4.15).

#### Enrichissement radial de la base

L'enrichissement radial (intrinsèque) de la base consiste à utiliser le vecteur des fonctions de base suivant

$$\mathbf{p}^T = [1, x, y, \sqrt{r}] \quad (4.17)$$

La taille de la base est ici seulement 4. Cette base ne garantit pas que la variation angulaire puisse être reproduite exactement mais reprend tout de même l'aspect le plus important du champ de déplacement en front de fissure. Les mêmes remarques au sujet de la limitation de la taille de la zone enrichie que pour la base complètement enrichie peuvent être faites.

### 4.3.4 Enrichissement par les fonctions poids

Fleming (1997) rapporte de bons résultats que ce soit avec l'enrichissement par la base (surtout la base complète) ou l'enrichissement extrinsèque et constate que ces bons résultats s'obtiennent avec un surcoût de calcul limité dans le cas de l'enrichissement extrinsèque. Plutôt que d'utiliser celui-ci, nous développons une nouvelle

technique, basée sur l'enrichissement des fonctions poids, qui s'intègre mieux dans la méthode sans maillage non-enrichie et qui ne demande pas de se soucier de limiter la zone enrichie. Un autre avantage de notre méthode est que nous l'étendrons sans grosse difficulté au cas tridimensionnel général, ce qui n'a jamais été fait avec l'une des techniques précédentes.

La nouvelle méthode enrichie consiste à ajouter certains nœuds avec des poids spéciaux à chaque pointe de fissure. En utilisant les équations (3.21), (3.24) et (3.25) de l'approximation MLS, chaque nœud et son poids associé donnent une fonction de forme qui enrichit l'ensemble des fonctions de forme normales. Notre but est que ces fonctions de forme se comportent d'une manière semblable au champ de déplacement en front de fissure donné aux équations (4.10) à (4.12). À cette fin, nous choisissons que les *fonctions poids* ont un comportement du type (4.11) et (4.12) et nous nous attendons à ce que les *fonctions de forme* résultantes leur ressemblent — comme c'est le cas pour les nœuds normaux à la figure (3.5).

Plus précisément, les critères suivants nous guident dans le choix des fonctions poids spéciales :

1. elles doivent varier en  $\sqrt{r}$  pour  $r$  petit : c'est le critère principal en vue d'obtenir par dérivation un champ de contrainte qui varie en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  pour  $r$  petit ;
2. elles doivent être positives : cela est requis pour garantir la définie positivité de la matrice  $\mathbf{A}$  donnée par (3.21) ;
3. elles doivent posséder une variation angulaire du même type que celui des équations (4.11) et (4.12) : cela suggère l'usage de  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  ;
4. elles doivent s'annuler en-dehors d'un petit support circulaire tout comme les fonctions poids normales : un enrichissement local est ainsi obtenu.

Après quelques recherches, l'utilisation des trois poids suivants se révèle être un bon choix :

$$w_c(\mathbf{x}) = \alpha\sqrt{s} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) f_4(s) \quad (4.18)$$

$$w_p(\mathbf{x}) = \alpha\sqrt{s} \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] f_4(s) \quad (4.19)$$

$$w_m(\mathbf{x}) = \alpha\sqrt{s} \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] f_4(s) \quad (4.20)$$

Dans ces équations,

- les indices  $c$ ,  $p$  et  $m$  signifient respectivement « cos », « plus sin » et « moins sin » ;
- $f_4$  est la fonction spline d'ordre 4 (3.39) et la distance normalisée  $s$  est mesurée depuis la pointe de la fissure (autrement dit, les supports des nœuds enrichis sont centrés sur la pointe  $\mathbf{x}_c = \mathbf{x}_p = \mathbf{x}_m = \mathbf{x}_{pointe}$ ) ;
- le rayon des supports des trois nœuds enrichis est identique  $d_c = d_p = d_m \equiv d_{enr}$  :  $s = \frac{r}{d_{enr}}$ .
- si la fissure contient des angles, ce rayon est limité à la distance entre la pointe et le premier angle de sorte que les fonctions enrichies ne soient calculées que dans une zone qui contient une fissure droite (figure 4.12) ;

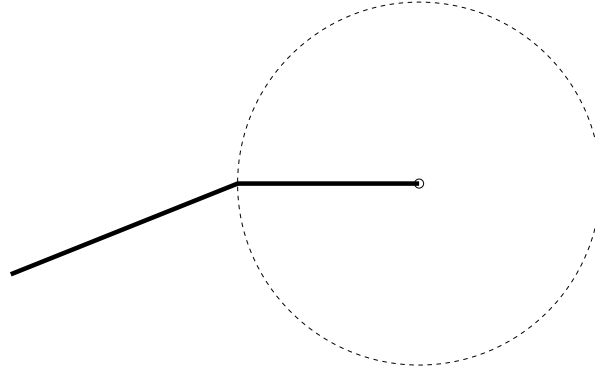


FIG. 4.12 – Taille limitée du support pour ne pas contenir d'angle

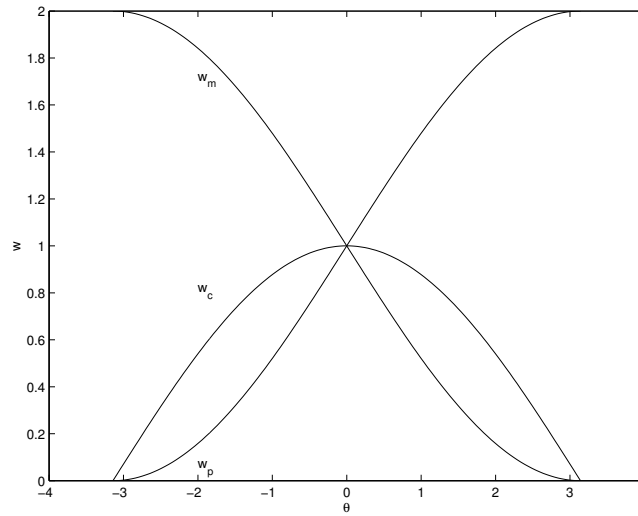


FIG. 4.13 – Poids enrichis en fonction de l'angle

– le facteur  $\alpha$  contrôle l'amplitude des poids enrichis par rapport aux poids normaux, nous prenons  $\alpha = 1$ .

En analysant les équations (4.18), (4.19) et (4.20) et en nous aidant du graphe de  $w_c$ ,  $w_p$  et  $w_m$  pour  $r$  fixé (figure 4.13) et de celui de n'importe lequel de ces poids pour  $\theta$  fixé (figure 4.14), nous observons que les trois fonctions rencontrent les critères fixés :

1. en  $r = 0$ ,  $s = 0$  et la dérivée première de la fonction spline est nulle :  $f_4'(0) = 0$ . Ainsi, pour  $\theta$  fixé, les dérivées partielles par rapport à  $r$  des fonctions poids spéciales  $\frac{\partial w_{c,p,m}}{\partial r}$  sont proportionnelles à  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  à la pointe. Ces dérivées apparaissent dans les dérivées des fonctions de forme (3.51), qui introduisent la singularité désirée dans le champ de contrainte ;
2. elles sont positives car aussi bien la fonction spline d'ordre 4 que les fonctions trigonométriques  $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ,  $1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  et  $1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$  ( $\theta \in [-\pi, \pi]$ ) le sont ;
3. les trois fonctions poids spéciales sont dominantes dans trois régions différentes autour de la pointe.  $w_c$  est dominant dans un région devant la fissure,  $w_p$  est dominant du côté de la fissure où  $\theta$  est positif et  $w_m$  est dominant du côté de la fissure où  $\theta$  est négatif. En outre,  $w_p$  et  $w_m$  sont discontinus le long de la

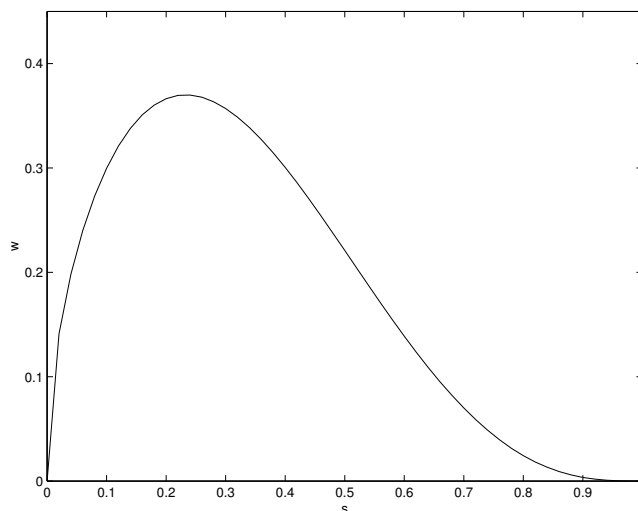


FIG. 4.14 – Poids enrichis en fonction de la distance

fissure ;

4. la présence de la spline donne un caractère local aux fonctions poids spéciales.

Sur la figure 4.15, nous représentons les fonctions de forme  $\phi_c$ ,  $\phi_p$  et  $\phi_m$  qui résultent des poids spéciaux choisis. Nous utilisons la même distribution de  $5 \times 5$  nœuds qu'à la figure 3.4 avec laquelle nous avons tracé les fonctions de forme normales sur la figure 3.5 et introduisons une fissure dont la pointe est située au nœud central. Les trois nœuds enrichis sont ajoutés à la pointe. Le rayon de leur support est le même que celui des nœuds normaux. En plus des trois graphes de  $\phi_c$ ,  $\phi_p$  et  $\phi_m$ , nous montrons en haut à gauche le plan avec les nœuds et la fissure depuis le même point de vue. Nous observons que les fonctions de forme ont les propriétés désirées :

- elles varient comme  $\sqrt{r}$  à la pointe et comme une spline plus loin ;
- elles sont dominantes dans trois régions différentes autour de la pointe ;
- $\phi_p$  et  $\phi_m$  présentent une discontinuité le long de la fissure qui renforce la discontinuité de l'approximation du déplacement fournie par la modification des poids normaux par la méthode de diffraction et qui permettra de représenter plus précisément l'ouverture de la fissure.

Insistons sur le fait que les fonctions poids enrichies sont introduites simplement et sans surcoût important dans l'approximation MLS et qu'il n'y pas besoin de gérer une zone enrichie, une zone de transition et une zone non-enrichie comme c'est le cas avec les méthodes décrites plus haut.

## 4.4 Intégration

Comme expliqué à la section 3.4, nous réalisons l'intégration sur le domaine en utilisant une division en cellules qui coïncident avec la distribution uniforme de nœuds et en réalisant une intégration de Gauss dans chaque cellule. En présence de fissure, certaines de ces cellules sont coupées par la fissure. Les intégrandes dans ces cellules sont discontinus de part et d'autres de la fissure. À cause de l'enrichissement,

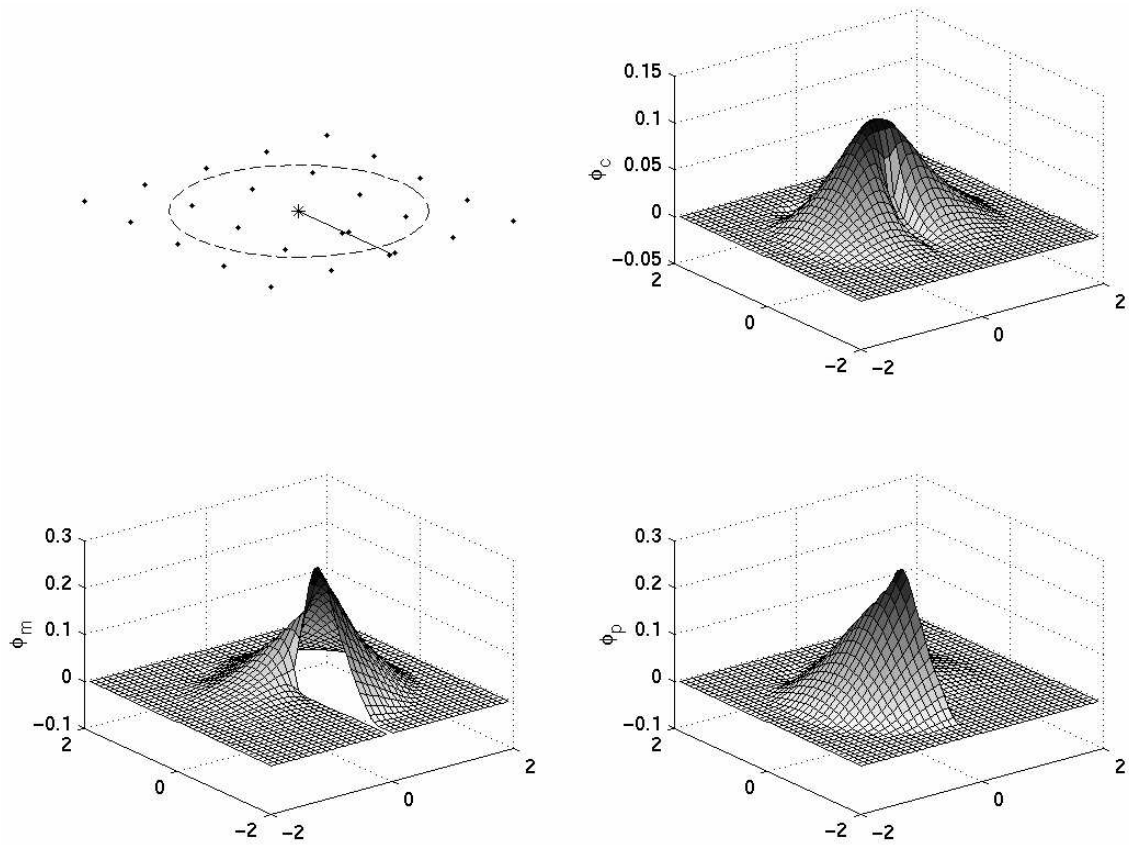


FIG. 4.15 – Fonctions de forme enrichies



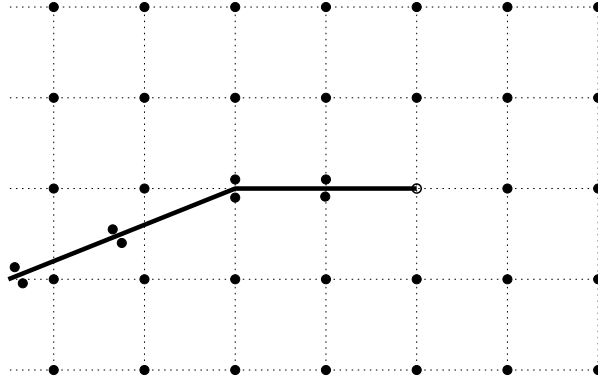


FIG. 4.16 – Division en cellules non-conformes à la fissure

les intégrandes dans les cellules qui contiennent une pointe de fissure sont singuliers en  $\frac{1}{r}$ . En effet, (3.93) est proportionnel au carré des dérivées (en  $\frac{1}{\sqrt{r}}$ ) des fonctions de forme (en  $\sqrt{r}$ ). À deux dimensions, un intégrande en  $\frac{1}{r}$  est bien intégrable.

À cause de la discontinuité et de la singularité, il faut se résoudre à utiliser un nombre de points de Gauss assez important dans chaque cellule. Hegen (1997) propose une subdivision des cellules coupées par la fissure en plus petites cellules qui s'alignent avec la fissure sur lesquels l'intégration de Gauss est réalisée pour éviter d'avoir des intégrandes discontinus. Cette technique demande une espèce de remaillage local qui nuit à l'élégance de la méthode sans maillage, n'est pas tout à fait générale et selon Fleming (1997), n'apporte pas d'augmentation significative de la précision par rapport à l'approche directe où beaucoup de points de Gauss sont utilisés. Nous utilisons donc cette approche directe. D'après notre expérience, un nombre de  $8 \times 8$  points de Gauss dans chaque cellule convient bien et permet d'intégrer de manière satisfaisante les discontinuités et les singularités ainsi que, bien entendu, les intégrandes réguliers.

## 4.5 Calcul des facteurs d'intensité de contrainte

À chaque pas de la simulation de la propagation, une fois qu'une approximation des champs de déplacement, déformation et contrainte est obtenue, il faut en extraire les facteurs d'intensité de contrainte. Nous utilisons le calcul de l'intégrale d'interaction sur un domaine autour de chaque pointe de fissure expliqué à la section 2.2.3. Pour rappel, nous avons montré que le facteur d'intensité du mode I s'obtient par

$$K_I = -\frac{E^*}{2} \int_A \left( W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (4.21)$$

où les champs de déplacement et de contrainte (1) sont ceux de la solution numérique obtenue et les champs de déplacement et de contrainte (2) sont ceux d'un mode I pur d'intensité unitaire. Une deuxième intégrale d'interaction entre la solution numérique et un mode II pur permet bien sûr d'obtenir  $K_{II}$  de la même manière.

Une approche plus immédiate pour obtenir les facteurs d'intensité de contrainte serait de faire la différence entre les déplacements obtenus de part et d'autre de

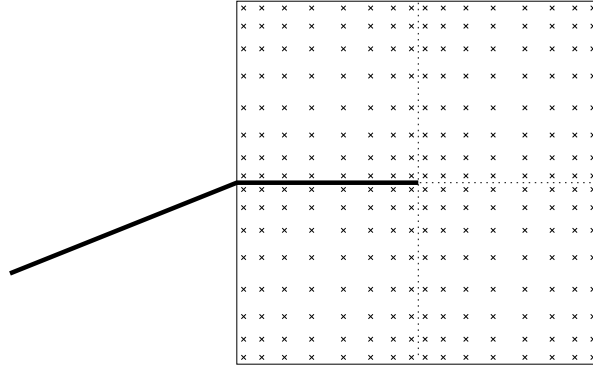


FIG. 4.17 – Domaine pour le calcul des intégrales d’interaction

la fissure. Pour le mode I par exemple, en calculant l’ouverture de la fissure à une certaine distance  $l$ , nous avons en utilisant (2.41)

$$K_I = \mu \sqrt{\frac{2\pi}{l}} (\kappa + 1) (u_y(l, \pi) - u_y(l, -\pi)) \quad (4.22)$$

L’avantage d’extraire les facteurs d’intensité de contrainte par une intégrale plutôt que avec cette approche locale est de lisser les oscillations parasites qui sont toujours présentes dans l’approximation en front de fissure. C’est d’ailleurs pour moyenner encore davantage les champs obtenus tout autour de la pointe que nous calculons une intégrale de domaine plutôt qu’une intégrale de contour.

Nous choisissons d’évaluer les intégrales d’interaction sur un domaine carré de côté  $c$  centré sur la pointe de la fissure. La courbe  $\Gamma_1$  de l’équation (2.76) est donc ramenée au simple point situé à la pointe et  $\Gamma_2$  est le contour extérieur du carré. La fonction poids choisie est

$$q = \left(1 - \frac{|x|}{\frac{c}{2}}\right) \left(1 - \frac{|y|}{\frac{c}{2}}\right) \quad (4.23)$$

qui vaut bien 1 en  $(0, 0)$  et 0 sur le carré de côté  $c$ .

La taille du carré est telle qu’il passe sur le premier angle de la fissure comme il est illustré sur la figure 4.17. De cette manière, l’ensemble de la fissure comprise dans le domaine sur lequel l’intégrale est calculée est droit en conformité avec la deuxième condition de la page 19. Le côté du carré vaut donc le diamètre de la zone enrichie. L’intégration sur ce carré est réalisée en le découpant en  $2 \times 2$  cellules avec  $8 \times 8$  points de Gauss dans chacune. Grâce à la découpe en  $2 \times 2$  cellules, l’intégrande qui est discontinu le long de la fissure et le long des droites  $x = 0$  et  $y = 0$  à cause des dérivées de  $q$  est bien continu dans chaque cellule.

## 4.6 Propagation des fissures

Pour les problèmes de fatigue, une fois que  $K_I$  et  $K_{II}$  sont obtenus à chaque pointe de fissure, il reste à vérifier si la ruine est atteinte et sinon, à déterminer l’emplacement de toutes les nouvelles fissures qu’il faudra analyser à l’étape suivante de la simulation.

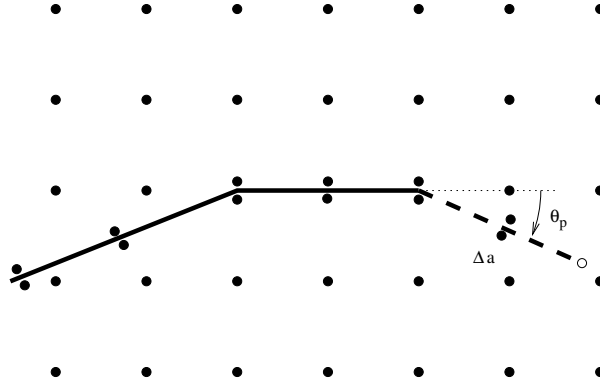


FIG. 4.18 – Prolongation de la fissure

S'il y a une seule pointe de fissure, nous calculons à cette pointe le facteur d'intensité de contrainte du mode I équivalent à notre mode mixte. Pour rappel, il vaut

$$K_{\text{eq}} = K_I \cos^3 \frac{\theta_p}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_p}{2} \sin \frac{\theta_p}{2} \quad (4.24)$$

où

$$\theta_p = 2 \arctan \left( \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right) \quad (4.25)$$

La ruine est atteinte si le facteur équivalent qui correspond à la charge appliquée maximale du cycle dépasse la ténacité

$$K_{\text{eq, max}} > K_{Ic} \quad (4.26)$$

Si la ruine n'est pas atteinte, on ajoute à la ligne brisée un nouveau segment qui fait un angle  $\theta_p$  avec le prolongement de la fissure et d'une longueur  $\Delta a$  fixée par l'utilisateur, ainsi qu'il est illustré sur la figure 4.18. Le nombre de cycles qui sont nécessaires pour allonger la fissure de  $\Delta a$  au pas  $i$  s'obtient en intégrant la loi de Paris par la règle du trapèze quand seront connus les  $K_{\text{eq}}$  au pas  $i + 1$  :

$$N_i = \int_{a_i}^{a_i + \Delta a} \frac{da}{C (\Delta K_{\text{eq}})^m} \cong \left( \frac{1}{C (\Delta K_{\text{eq}}(a_i))^m} + \frac{1}{C (\Delta K_{\text{eq}}(a_i + \Delta a))^m} \right) \frac{\Delta a}{2} \quad (4.27)$$

La durée de vie est la somme des nombres de cycles sur chaque incrément jusqu'à la ruine en prenant pour le dernier pas le nombre de cycles jusqu'à  $K_{\text{eq, max}} = K_{Ic}$ .

S'il y a plusieurs fissures, nous calculons le facteur équivalent à toutes les pointes et désignons comme pointe de fissure principale celle qui a le plus grand  $K_{\text{eq}}$ . La ruine est atteinte si

$$K_{\text{eq, max, principale}} > K_{Ic} \quad (4.28)$$

Si la ruine n'est pas atteinte, nous ajoutons un nouveau segment à chaque pointe de fissure dans la direction  $\theta_p$ . À la pointe principale, la longueur de l'incrément prend la valeur  $\Delta a_{\text{principale}}$  fixée par l'utilisateur. Aux autres pointes, l'incrément est plus court. Comme le taux de croissance est proportionnel à  $\Delta K^m$  selon la loi de Paris, nous ajoutons un incrément de longueur

$$\Delta a_i = \Delta a_{\text{principale}} \left( \frac{\Delta K_{\text{eq}, i}}{\Delta K_{\text{eq}, \text{principale}}} \right)^m \quad (4.29)$$

Le nombre de cycles est obtenu en utilisant l'équation (4.27) à la pointe principale.

Un compromis doit être fait sur la longueur de l'incrément  $\Delta a$ . S'il est trop court, la taille des domaines d'influence des nœuds enrichis et le carré d'intégration des intégrales  $J$  sont trop petits avec pour conséquences respectives un enrichissement trop faible et une précision dégradée pour le calcul des  $K$ . S'il est trop grand, le chemin linéaire par morceaux n'est pas en mesure de représenter précisément le chemin courbe réel de la fissure.

# Chapitre 5

## Résultats numériques pour les problèmes à deux dimensions

Cinq exemples de pièces fissurées en état plan sont résolus dans ce chapitre. Ils sont présentés dans un ordre de difficulté croissant pour mettre en évidence le mode I, le mode mixte, la direction de propagation, la fatigue et la présence de plusieurs fissures.

Le premier exemple est celui d'une plaque carré en traction qui possède une fissure perpendiculaire à la direction de la traction, soit au centre de la plaque, soit débouchante. Cet exemple est résolu pour des fissures de différentes longueurs. C'est un cas de mode I pur, c'est-à-dire où seul le mode d'ouverture de la fissure joue un rôle. L'objectif de ces exemples pour lesquels la valeur de  $K_I$  est connue et répertoriée dans des tables pour des fissures de différentes longueurs est de comparer la qualité des valeurs de  $K_I$  prédites d'une part par une méthode sans maillage classique et d'autre part par notre méthode enrichie.

Le deuxième exemple est une plaque rectangulaire soumise à traction possédant une fissure inclinée par rapport à la direction de la traction. Cet exemple est résolu pour différents angles d'inclinaison de la fissure. Il s'agit d'un exemple de mode mixte dont la solution analytique est connue dans le cas d'une plaque de dimension infinie. Les résultats obtenus pour une fissure de petite longueur par rapport à la taille de la plaque sont comparés à des valeurs de référence. L'objectif de cet exemple est de valider notre méthode pour les problèmes de mode mixte et à nouveau de comparer les résultats fournis par une méthode classique et une méthode enrichie.

Le troisième exemple a pour objet la fissuration quasi-statique d'une poutre encastree, dont la fissure initiale présente à sa pointe une perturbation sous la forme d'un petit changement de direction. Le but est de montrer l'importance de déterminer correctement les facteurs d'intensité de contrainte pour obtenir une direction de propagation correcte. Une comparaison des chemins suivis par la fissure prédits par la méthode classique et la méthode enrichie est menée en se référant à des résultats expérimentaux et numériques précédents.

L'objectif du quatrième exemple est de valider la mise en œuvre du calcul de durée de vie de pièces en fatigue. Une pièce rectangulaire présentant une fissure débouchante inclinée est soumise à une traction cyclique. Les facteurs d'intensité de contrainte calculés par la méthode sans maillage enrichie le long du chemin de la propagation de la fissure sont utilisés dans la loi de Paris pour évaluer la durée de

vie jusqu'à la rupture brutale. Le résultat est comparé à celui obtenu par une autre méthode numérique.

Enfin, le cinquième exemple montre la résolution par la méthode enrichie d'un problème où deux fissures sont présentes dans une éprouvette qui est soumise à un chargement cyclique. La propagation des fissures l'une vers l'autre suivie de leur recouvrement et la durée de vie calculée de l'éprouvette sont comparées à des résultats expérimentaux.

## 5.1 Fissures centrée et débouchante

### 5.1.1 Fissure centrée

Une simple fissure droite est au centre d'une plaque carrée en traction. Le côté de la plaque vaut  $2W = 2^1$  et la longueur de la fissure  $2a$  varie de 0,2 à 1,4. Une distribution de  $21 \times 21$  nœuds uniformément répartis est utilisée. Les nœuds qui sont situés sur la fissure, dont le nombre augmente avec la longueur de la fissure, sont dédoublés. Voir figure 5.1. Le problème est résolu sans nœud ajouté d'une part et avec les trois nœuds avec les poids spéciaux à la pointe de la fissure d'autre part. Le rayon des supports de chaque nœud (normal ou enrichi) vaut 0,17. L'intégration pour calculer la matrice de raideur est réalisée en divisant le carré en  $20 \times 20$  cellules, avec  $8 \times 8$  points de Gauss dans chaque cellule. L'intégration pour calculer l'intégrale J en utilisant la formulation sur un domaine se fait sur un carré centré sur la pointe, de côté 0,2, divisé en  $2 \times 2$  cellules avec  $8 \times 8$  points de Gauss dans chacune. La théorie de la propagation de fissures par fatigue n'est pas appliquée pour ce problème ; la fissure croît par pas de 0,1 à chacune des deux pointes. Ceci est justifié car les facteurs d'intensité de contrainte sont les mêmes aux deux pointes par symétrie.

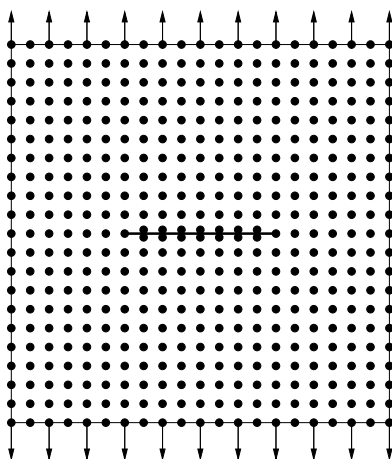


FIG. 5.1 – Fissure centrée

La valeur de  $K_I$  pour ce problème simple est connue :

$$K_I = F_I(\alpha)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.1)$$

<sup>1</sup>Dans cette section et la suivante où des problèmes académiques simples sont résolus, nous omettons les unités.

avec  $\alpha = \frac{a}{W}$ .  $F_I$  est un facteur de forme qui prend en compte l'augmentation de  $K_I$  quand la fissure s'approche du bord. Il vaut 1 si le rapport  $\alpha$  est nul (c'est le cas du problème fondamental du mode I : une fissure dans une plaque de dimension infinie en traction) et tend vers  $\infty$  si  $\alpha$  tend vers 1 (plaque complètement fissurée). Entre ces extrêmes, les valeurs de  $F_I$  peuvent être calculées analytiquement et ces valeurs sont répertoriées dans des tables pour certaines valeurs de  $\alpha$  comme par exemple dans le *handbook* de Murakami (1987). Dans le tableau 5.1, nous comparons à cette référence les valeurs de  $\frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}}$  obtenues numériquement par les deux méthodes pour  $a$  variant de 0,1 à 0,7 par pas de 0,1.

Le tableau montre une amélioration significative quand la méthode enrichie est utilisée. Insistons sur le fait que pour obtenir un tel gain de précision, il suffit d'ajouter six nœuds aux plus de 800 nœuds normaux présents. Le surcoût en temps de calcul est de 4% seulement. Toutefois, pour  $a = 0,1$ , le  $K_I$  calculé n'est pas aussi bon que pour  $a \geq 0,2$  (tout en restant meilleur que sans enrichissement) ; cela est probablement dû au recouvrement des supports (de rayon 0,17) des nœuds spéciaux des deux points.

Demi-longueur de la fissure	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$F_I$ — référence	1,014	1,055	1,123	1,216	1,334	1,481	1,680
$F_I$ — sans enrichissement	0,967	1,010	1,075	1,162	1,272	1,408	1,586
Erreur — sans enrichissement	4,6%	4,3%	4,3%	4,4%	4,6%	4,9%	5,6%
$F_I$ — avec enrichissement	1,004	1,057	1,125	1,217	1,333	1,477	1,668
Erreur — avec enrichissement	0,99%	0,15%	0,14%	0,05%	0,09%	0,26%	0,74%

TAB. 5.1 – Facteurs d'intensité de contrainte du mode I pour la fissure centrée

Nous vérifions également sur ce problème de mode I pur que nous obtenons les mêmes résultats pour  $K_I$  que soit par l'intégrale  $J$  (2.79) ou par l'intégrale d'interaction avec le mode I (2.80) et que l'intégrale d'interaction avec le mode II est nulle.

### 5.1.2 Fissure débouchante

Dans le tableau 5.2, les résultats pour le problème de la fissure débouchante sont présentés pour une fissure variant de 0,2 à 1,6 par pas de 0,2. Nous utilisons les mêmes données et la même méthode que dans la section précédente. Voir figure 5.2. À nouveau, la méthode enrichie donne des résultats significativement meilleurs.

## 5.2 Fissure inclinée statique

Une plaque rectangulaire de dimension  $90 \times 180$  sous tension uniforme  $\sigma = 160$  sur sa largeur présente une fissure inclinée de longueur 18 qui est inclinée d'un angle  $\theta$  par rapport à la perpendiculaire à la direction de la traction. Une distribution de  $19 \times 37$  nœuds uniformément répartis est utilisée et 4 nœuds sont ajoutés de chaque côté de la fissure (figure 5.3) pour éviter le problème décrit dans la section 4.2 des zones ombrées de la figure 4.10. Le rayon de tous les supports est de 8,5. L'intégration

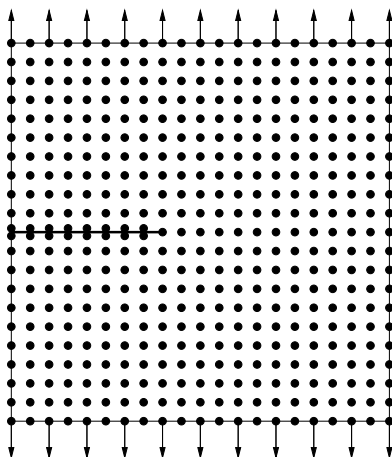


FIG. 5.2 – Fissure débouchante

Longueur de la fissure	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$F_I$ — référence	1,23	1,49	1,85	2,32	3,01	4,15	6,40	12,0
$F_I$ — sans enrichissement	1,151	1,404	1,745	2,190	2,823	3,856	5,843	10,55
Erreur — sans enrichissement	6,4%	5,8%	5,7%	5,6%	6,2%	7,1%	8,7%	12,1%
$F_I$ — avec enrichissement	1,217	1,477	1,836	2,306	2,978	4,086	6,239	11,45
Erreur — avec enrichissement	1,0%	0,86%	0,78%	0,62%	1,1%	1,6%	2,5%	4,6%

TAB. 5.2 – Facteurs d'intensité de contrainte du mode I pour la fissure débouchante

est réalisée sur  $18 \times 36$  cellules, avec  $8 \times 8$  points de Gauss dans chacune. Certaines cellules sont coupées par la fissure mais le nombre de points d'intégration dans celles-ci se révèle suffisant pour intégrer correctement les fonctions discontinues et il n'est pas nécessaire d'ajouter des points de Gauss.

Pour une plaque de dimension infinie, la solution exacte est connue :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \theta \quad (5.2)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \cos \theta \sin \theta \quad (5.3)$$

Physiquement, ces formules signifient que le mode I est maximum si la fissure est perpendiculaire à la sollicitation et qu'il décroît jusqu'à être nul lorsque la fissure s'aligne avec celle-ci alors que le mode II est maximum pour une inclinaison de  $45^\circ$  et nul pour  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ . Avec les dimensions que nous avons choisies où la longueur de la fissure vaut 20% de la largeur de la plaque, comme la comparaison de la méthode classique avec la méthode enrichie que nous souhaitons mener se joue sur quelques pour-cents, il est nécessaire de prendre pour référence les valeurs du tableau du *handbook* de Murakami (1987, page 911) plutôt que cette solution analytique. Les valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  y sont données pour les dimensions que nous avons choisies pour des inclinaisons de 15, 30, 45, 60 et 75 degrés. Nous traçons donc sur la figure 5.4 la référence et les facteurs d'intensité de contrainte des modes I et II obtenus avec et sans enrichissement en fonction de l'angle d'inclinaison. Nous constatons à nouveau une nette amélioration de la solution avec la méthode enrichie pour toutes les valeurs de  $\theta$ .



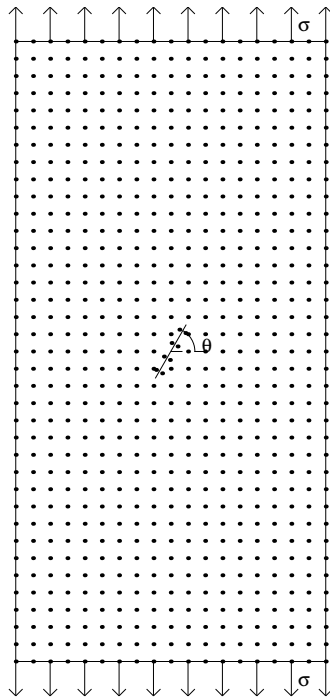


FIG. 5.3 – Distribution nodale pour la fissure inclinée

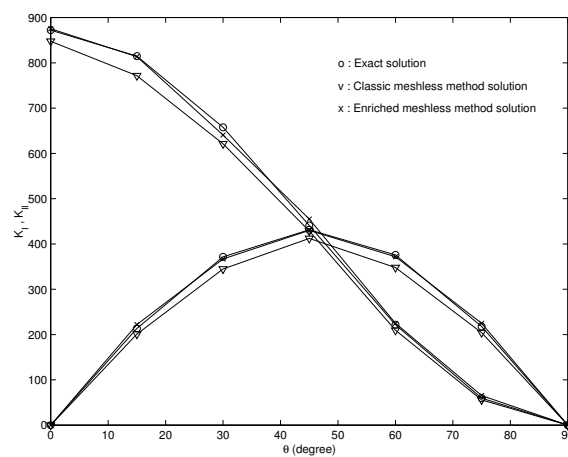
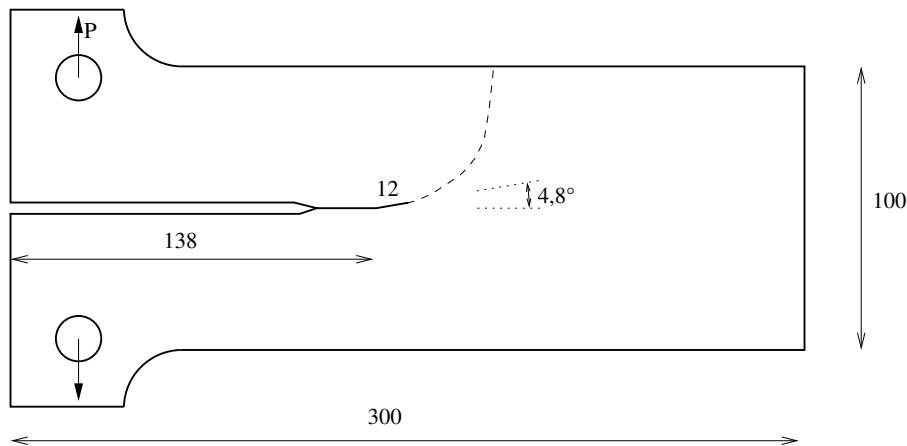


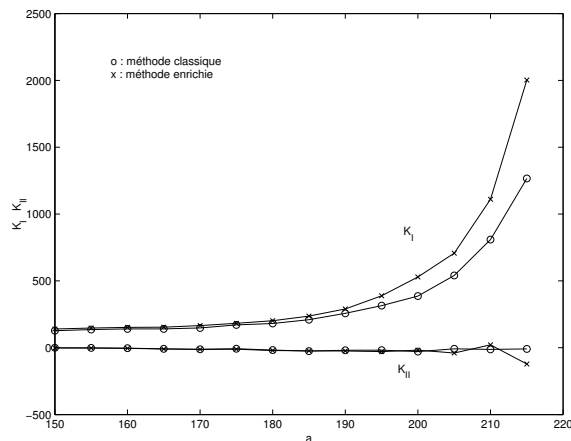
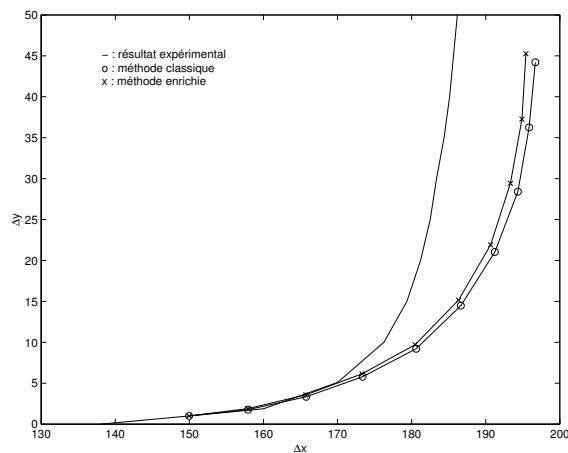
FIG. 5.4 – Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure inclinée

FIG. 5.5 – Géométrie de la *double cantilever beam*

### 5.3 Propagation quasi-statique d'une fissure dans une DCB

Étudions le spécimen fissuré de la figure 5.5. Il est connu sous le nom de *double cantilever beam* ou DCB en abrégé. Les dimensions sont les suivantes : longueur de la poutre  $L = 300 \text{ mm}$ , hauteur  $h = 100 \text{ mm}$ , longueur de la fissure initiale  $a = 138 \text{ mm}$ . Une force  $P = 100 \text{ N}$  est appliquée sur chaque bras de la double poutre. Les propriétés mécaniques sont  $E = 200 \text{ GPa}$  et  $\nu = 0,3$  et nous supposons un état plan de contrainte. Nous introduisons une perturbation de la direction de la fissure à la pointe de celle-ci, inclinée d'un angle  $4,8^\circ$  et de longueur  $dx = 12 \text{ mm}$ . Physiquement, ce type de perturbation peut venir d'une imperfection comme une inclusion ou un trou dans le spécimen. Ce phénomène a été étudié expérimentalement par Sumi, Nemat-Nasser et Keer (1985) qui ont mis en évidence la nature instable du chemin suivi par la fissure : la perturbation est responsable d'une propagation de la fissure en direction des frontières inférieure ou supérieure du spécimen en s'éloignant de la fibre centrale de la poutre. Le chemin suivi par la fissure est représenté en ligne discontinue sur la figure 5.5. Ce problème a été étudié numériquement par Sumi (1985) par la méthode des éléments finis en remaillant le spécimen à chaque pas puis par Fleming *et al.* (1997) et dans la thèse de Fleming (1997) par une méthode sans maillage en utilisant soit une distribution raffinée qui se déplace avec la pointe de la fissure soit une base enrichie du terme  $\sqrt{r}$ . Nous résolvons ce problème par la méthode sans maillage classique avec une distribution de  $49 \times 17$  nœuds et par notre méthode enrichie en ajoutant les trois nœuds spéciaux habituels.

Les facteurs d'intensité de contrainte au cours de la propagation sont montrés sur la figure 5.6. Le mode I domine nettement mais le facteur d'intensité de contrainte du mode II faiblement négatif est suffisant pour courber le chemin de la fissure vers le bord supérieur de la DCB. Le chemin suivi par la fissure observé expérimentalement et celui prédit par chacune des deux méthodes est tracé sur les figures 5.7, 5.8 et 5.9 pour des incréments de fissure de respectivement 8, 5 et 3 mm. Dans tous les cas, la méthode enrichie, grâce à la meilleure estimation des facteurs d'intensité de contrainte, fournit un chemin plus proche du résultat expérimental, qui reproduit plus précisément la courbure rapide vers le bord supérieur. En comparant nos figures

FIG. 5.6 – Facteurs d'intensité de contrainte pour la DCB ( $\Delta a = 5 \text{ mm}$ )FIG. 5.7 – Chemin suivi par la fissure ( $\Delta a = 8 \text{ mm}$ )

avec celles de la thèse de Fleming, nous obtenons de meilleurs résultats avec notre méthode enrichie que avec la méthode avec une base enrichie du terme  $\sqrt{r}$ .

Cet exemple nous permet également de montrer l'influence du pas  $\Delta a$ . Sur la figure 5.10, nous reproduisons les chemins obtenus par la méthode enrichie pour les trois valeurs du pas et observons une plus grande précision pour un petit pas. Il y a toutefois une limite inférieure au pas qu'il faut utiliser : si celui-ci est trop petit, le rayon des supports des nœuds enrichis et les domaines utilisés pour le calcul de l'intégrale  $J$  deviennent trop petits également avec pour conséquences respectives une diminution de l'amélioration du résultat due à l'enrichissement et une pauvre précision pour le calcul des  $K_I, K_{II}$  qui présentent alors des oscillations parasites.

## 5.4 Propagation par fatigue d'une fissure inclinée débouchante

Nous étudions la fissuration par fatigue d'une fissure inclinée en appliquant la méthode décrite en 4.6. Nous utilisons les mêmes dimensions, les mêmes propriétés

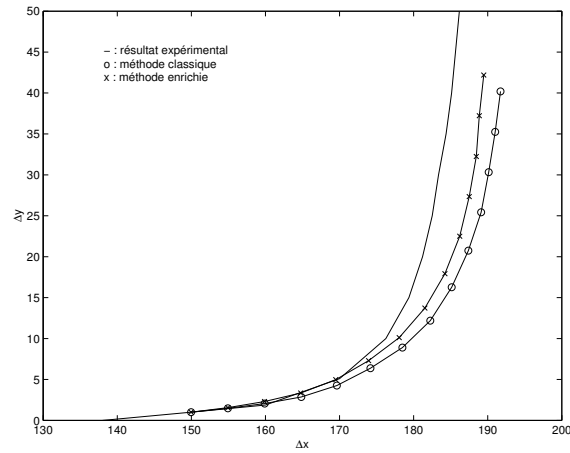
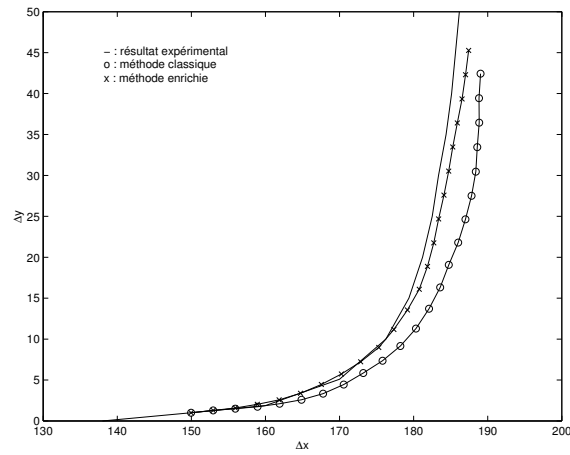
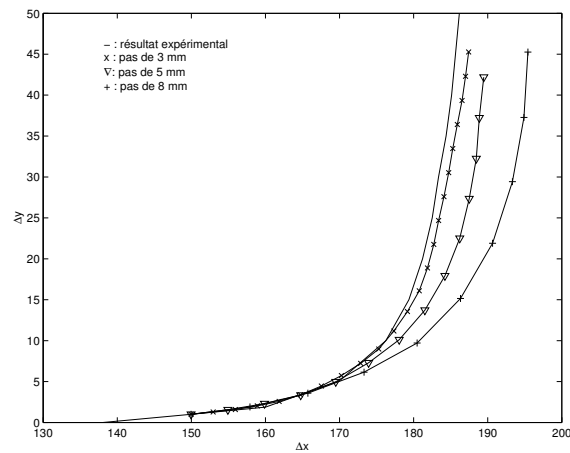
FIG. 5.8 – Chemin suivi par la fissure ( $\Delta a = 5$  mm)FIG. 5.9 – Chemin suivi par la fissure ( $\Delta a = 3$  mm)

FIG. 5.10 – Chemin suivi par la fissure prédit par la méthode enrichie pour différents pas

matérielles et le même chargement que Yan et Nguyen-Dang (1995) pour réaliser une comparaison de nos résultats avec les résultats obtenus dans cet article par une méthode d'éléments de frontière. Une plaque rectangulaire ( $100\text{ mm} \times 200\text{ mm}$ ) avec une fissure débouchante ( $a_0 = 20\text{ mm}$ ) qui fait un angle de  $40^\circ$  avec la perpendiculaire au bord est soumise à une tension cyclique à ses deux extrémités entre  $\sigma_{\max} = 40\text{ N/mm}$  et  $\sigma_{\min} = 0$ , soit un chargement suivi d'un déchargement complet sans recompression. Les propriétés matérielles sont les suivantes (alliage Al 2024-T3) :

$$\begin{aligned}
 E &= 74\,000\text{ N/mm}^2 && \text{module de Young} \\
 \nu &= 0,3 && \text{coefficient de Poisson} \\
 K_{Ic} &= 1897,36\text{ N/mm}^{\frac{3}{2}} && \text{ténacité} \\
 m &= 3,32 && \text{exposant de Paris} \\
 C &= 2,087136 \times 10^{-13} && \text{constante de Paris}
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Nous utilisons une distribution de  $21 \times 41$  nœuds plus 5 nœuds de chaque côté de la fissure initiale. Il y a un nœud à l'intersection de la fissure et du bord qui est dédoublé. L'avantage de la méthode enrichie étant établi sur la méthode classique grâce aux exemples précédents, nous utilisons désormais systématiquement les 3 nœuds enrichis à la pointe de la fissure. Quand la fissure croît, ces nœuds enrichis progressent avec la pointe de la fissure et un nœud normal est ajouté de chaque côté de l'incrément de fissure. Le rayon des supports des nœuds normaux est de  $8,5\text{ mm}$ . Nous choisissons l'incrément de longueur de la fissure  $\Delta a$  et le rayon des supports des nœuds enrichis égaux à  $5\text{ mm}$ . L'intégration est réalisée sur  $20 \times 40$  cellules, avec à nouveau  $8 \times 8$  points de Gauss dans chacune.

La variation des facteurs d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de la fissure est représentée à la figure 5.11. Ces valeurs de  $K_I$  et  $K_{II}$  correspondent à la charge  $\sigma_{\max}$  ; elles oscillent entre 0 et cette valeur au cours d'un cycle de charge. L'extension de la fissure en fonction du nombre de cycles est représentée à la figure 5.12. Sur ces figures, l'astérisque signale l'apparition de la rupture brutale où le facteur d'intensité de contrainte équivalent de la charge maximale atteint la valeur de la ténacité. La longueur de la fissure est alors de  $61,3\text{ mm}$  et la durée de vie est évaluée à 131 411 cycles. Ces résultats sont en accord avec ceux de Yan et Nguyen-Dang :  $61,2\text{ mm}$  pour la longueur finale et 144 885 cycles. Le chemin suivi par la fissure est tracé sur la figure 5.13. Nous y observons un changement soudain de la direction de la fissure dès le début de la propagation. Ce changement a pour effet d'aligner la fissure perpendiculairement à la sollicitation et d'annuler pratiquement  $K_{II}$ . Après cette brisure initiale, la fissure se propage en ligne droite.

## 5.5 Propagation par fatigue de deux fissures

Une plaque rectangulaire ( $90\text{ mm} \times 180\text{ mm}$ ) avec deux fissures intérieures parallèles non-alignées de longueur  $2a_0 = 10\text{ mm}$  est soumise à une tension cyclique entre  $\sigma_{\max} = 160\text{ N/mm}$  et  $\sigma_{\min} = 0$  perpendiculaire aux fissures. La distance horizontale entre les pointes de deux fissures est de  $15\text{ mm}$  et la distance verticale  $5\text{ mm}$ . Les propriétés matérielles sont les mêmes que pour l'exemple précédent. Nous utilisons une distribution de  $19 \times 37$  nœuds avec deux nœuds supplémentaires de chaque côté des fissures initiales (rayon= $8,5\text{ mm}$ ) et les trois nœuds enrichis à chacune des

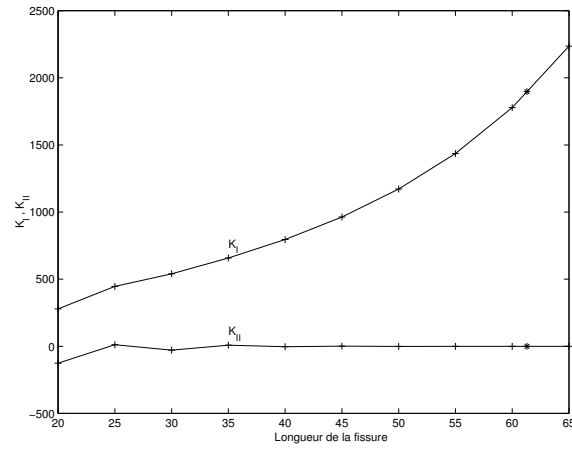


FIG. 5.11 – Facteurs d'intensité de contrainte de la fissure simple en fatigue

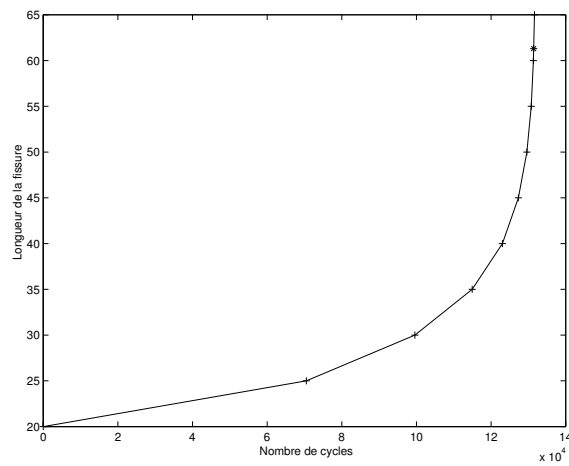


FIG. 5.12 – Extension en fonction du nombre de cycles de la fissure simple en fatigue

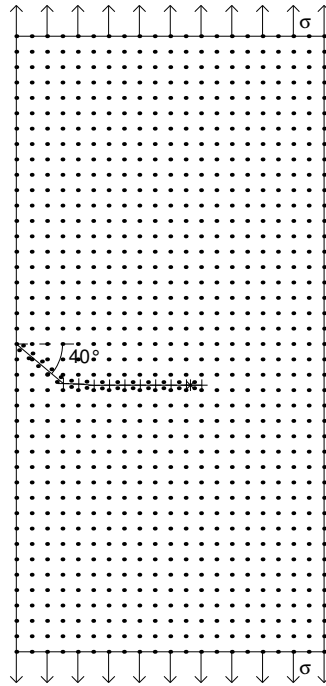


FIG. 5.13 – Distribution nodale et chemin de la fissure simple en fatigue

quatre pointes. Quand la fissure croît, les nœuds enrichis progressent et des nœuds normaux sont ajoutés comme dans la section précédente. L'incrément de fissure maximal  $\Delta a_{\max}$  vaut  $2\text{ mm}$ . Le rayon des supports des nœuds enrichis en une pointe de fissure vaut l'incrément de fissure à cette pointe au pas précédent. L'intégration est réalisée sur  $18 \times 36$  cellules, avec  $8 \times 8$  points de Gauss.

L'évolution de  $K_I$  et  $K_{II}$  (dûs à  $\sigma_{\max}$ ) aux pointes de chacune des deux fissures vers l'intérieur ( $A$ ) et du côté du bord ( $B$ ) en fonction de la longueur de la fissure est représentée sur la figure 5.15. Sur la figure 5.16 sont représentées l'extension de la fissure en  $A$ , celle en  $B$  et leur somme (à laquelle on peut ajouter la longueur initiale pour obtenir la longueur totale). Le chemin suivi par les fissures est tracé sur la figure 5.14. L'astérisque signale à nouveau l'apparition de la rupture brutale. Le chemin prédit est en accord avec les résultats expérimentaux rapportés dans Tu et Cai (1988). Les courbes 5.15 et 5.16 et la durée de vie estimée à 6792 cycles sont en bon accord avec les résultats de Yan et Nguyen-Dang (1995) obtenus par une méthode d'éléments de frontière.

L'interprétation de ces figures est la suivante :

- Au début, il s'agit d'un mode I pur où les facteurs d'intensité de contrainte en  $A$  et  $B$  sont approximativement égaux et proches de  $\sigma\sqrt{\pi a}$ . Les deux fissures se comportent indépendamment comme si elles étaient chacune dans le cas fondamental d'une fissure en mode I dans une plaque infinie en traction.
- Ensuite,  $K_I$  en  $A$  augmente plus vite qu'en  $B$ . Il y a une interaction entre les deux pointes  $A$  qui conduit à un facteur d'intensité de contrainte variant en  $F_I\sigma\sqrt{\pi a}$  où le facteur de forme  $F_I$  (supérieur à 1) croît à mesure que les deux pointes se rapprochent. Dans notre modélisation, des incréments plus petits que les  $2\text{ mm}$  sont ajoutés en  $B$ .
- Lorsque la distance horizontale des pointes  $A$  s'approche de 0, il y a apparition

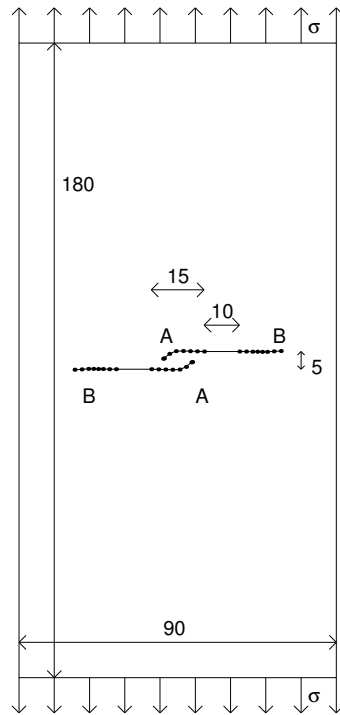


FIG. 5.14 – Chemin des fissures pour l'exemple de la paire de fissures en fatigue

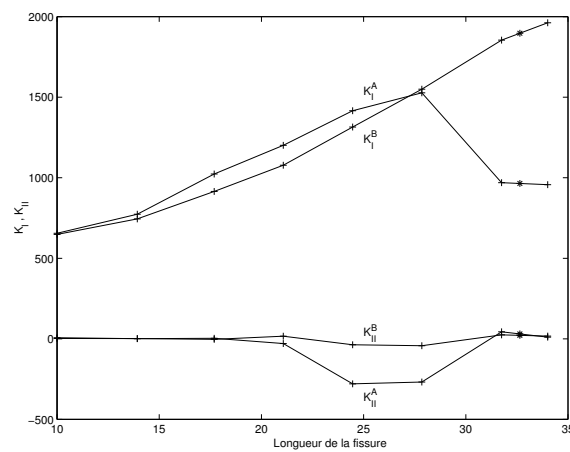


FIG. 5.15 – Facteurs d'intensité de contrainte pour l'exemple de la paire de fissures en fatigue



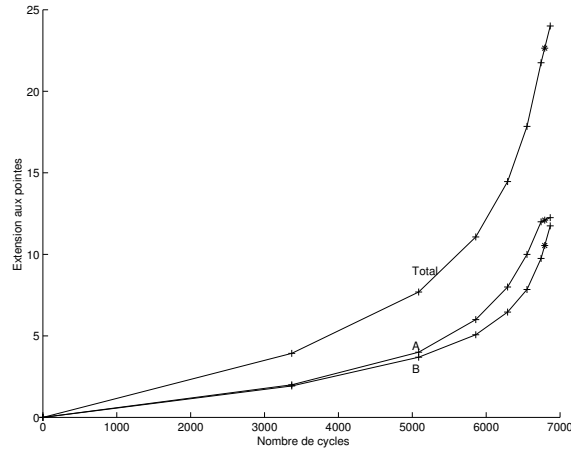


FIG. 5.16 – Extension en fonction du nombre de cycles pour l'exemple de la paire de fissures en fatigue

d'un mode II en  $A$ .  $K_{II}$  en  $A$  devient négatif de telle sorte que les fissures croissent en s'incurvant l'une vers l'autre. Cet effet est semblable à celui d'une fissure qui s'incurve vers un trou dans une plaque jusqu'à rejoindre celui-ci.

- Mais, lorsque apparaît un recouvrement des fissures du côté  $A$ ,  $K_I$  y faiblit puis y décroît alors qu'il continue à croître régulièrement en  $B$ . Cet effet est connu sous le nom d'effet d'écran.
- $K_I$  devient plus important en  $B$  qu'en  $A$ .  $K_{II}$  qui était négatif en  $A$  redevient proche de 0 maintenant que la propagation en  $A$  est dirigée vers l'autre fissure. Il faut y voir le même comportement que dans l'exemple 5.4 où la fissure s'alignait dans la direction où le mode I est le plus important. À l'avant-dernier pas, le facteur d'intensité équivalent en  $A$  ne vaut plus que environ la moitié par rapport à  $B$ . Par conséquent, la fissure (qui croît en fonction de  $K_{eq}^m$  avec un exposant  $m$  de 3,32) progresse environ 10 fois moins vite en  $A$ . Cela explique que nous obtenions au dernier pas en  $A$  des résultats très proches de l'avant-dernier pas.
- Finalement, le facteur d'intensité équivalent en  $B$  qui croît de plus en plus vite à mesure qu'il s'approche du bord extérieur dépasse la ténacité du matériau et c'est en  $B$  que la rupture brutale survient.

## 5.6 Conclusions

Les fonctions poids enrichies que nous avons introduites dans la formulation classique de la méthode sans maillage pour capturer la singularité du champ de contrainte en front de fissure ont montré leur efficacité dans des problèmes de mécanique de la rupture à deux dimensions. Grâce à celles-ci, nous pouvons nous contenter d'une distribution grossière de nœuds dans la pièce à analyser, qui sont répartis de manière uniforme sans se soucier de la position qu'occupent la ou les fissures ni de la zone où nous nous attendons à les voir se propager. Cette méthode de prise en compte dans l'approximation du déplacement du comportement attendu en front de fissure s'introduit naturellement dans la méthode classique et elle n'ajoute que trois

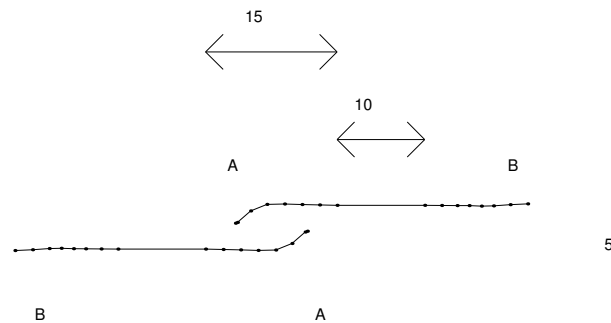


FIG. 5.17 – Agrandissement du chemin suivi par la paire de fissures

degrés de liberté par front de fissure aux quelques centaines de degrés de liberté existants. Sur des problèmes académiques de mode pur d'ouverture ou de mode mixte, elle apporte un gain tel que l'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte passe de quelques pour-cents à moins d'un pour-cent pour une augmentation du temps de calcul de quelques pour-cents seulement. La qualité des facteurs d'intensité de contrainte obtenus, qui sont utilisés pour prédire la direction de la propagation par un critère comme celui du maximum de la contrainte principale avec une discrétisation linéaire par morceaux de la fissure, est apparente sur l'exemple de la fissure avec une petite perturbation dans la DCB. Nous avons appliqué avec succès la méthode enrichie à des exemples de fissuration par fatigue où nous avons obtenus des propagations et des diagrammes de durée de vie en accord avec des références expérimentales ou numériques.

Finalement, il nous semble intéressant de quantifier l'efficacité de la méthode. Le point de repère que nous donnons permettra de comparer notre méthode enrichie avec d'autres méthodes sans maillage ou avec d'autres méthodes numériques utilisées en mécanique de la rupture. À notre connaissance et à notre regret, de telles références sont rarement voire jamais fournies dans les autres publications qui s'en tiennent à des considérations sur l'efficacité relative d'une méthode par rapport à une autre ou à des ordres de grandeur sans avancer de chiffres *en dur*. Avec notre code optimisé, la résolution complète du problème de la section 5.5 qui comptait huit pas (chaque pas possédant entre 719 et 783 nœuds, et demandant plus de 40 000 points de Gauss, la résolution par une méthode itérative d'un système linéaire creux, le calcul de l'intégrale  $J$  et la mise à jour) demande seulement 23 secondes sur notre station de travail (processeur Xeon à 2,8 GHz, tout le problème tenant en RAM).

# Chapitre 6

## Méthode sans maillage en mécanique de la rupture à trois dimensions

Dans ce chapitre, nous présentons les modifications à apporter à la méthode sans maillage décrite au chapitre 3 en présence de fissures dans le cas tridimensionnel et expliquons la méthode de simulation de propagation de celles-ci. Le plan de ce chapitre suit tout à fait celui du chapitre sur la méthode à deux dimensions. Nous détaillons dans l'ordre la représentation des fissures et leur influence sur les fonctions de forme à la section 6.1, la distribution nodale sur laquelle sont construites ces fonctions de forme à la section 6.2, l'enrichissement de l'approximation à la section 6.3, le schéma d'intégration à la section 6.4, la technique de calcul des facteurs d'intensité de contrainte à la section 6.5 et le modèle de propagation des fissures à la section 6.6. Nous concluons le chapitre par une comparaison entre les cas bi et tridimensionnel à la section 6.7.

### 6.1 Représentation des fissures

À trois dimensions, notre modèle pour représenter une fissure est également linéaire par morceaux : la surface de la fissure est modélisée par un ensemble de triangles. Une représentation du front de la fissure par un chemin formé de segments de droite est aussi nécessaire. Deux exemples sont montrés sur la figure 6.1. À gauche, une fissure circulaire (vue de haut) est représentée par 16 triangles qui partagent tous le centre de la fissure comme sommet commun. Le front de la fissure est le chemin des 16 côtés passant par les sommets des triangles qui ne sont pas au centre. À droite, une fissure circulaire est représentée par 64 triangles et le front est représentée par le chemin formé des 16 segments de droite les plus extérieurs. Il s'agit en fait de la fissure précédente qui a crû dans son plan d'un pas égal sur toute sa circonférence par la technique qui sera expliquée à la section 6.6. Ces deux fissures sont planes mais le modèle permet de représenter des fissures gauches également. Par exemple sur le dessin de droite de la figure 6.1, si les triangles de gauche ont une élévation positive (ils sortent du plan) et ceux de droite une élévation négative (ils rentrent dans le plan), ce dessin est celui d'une fissure gauche vue de haut.

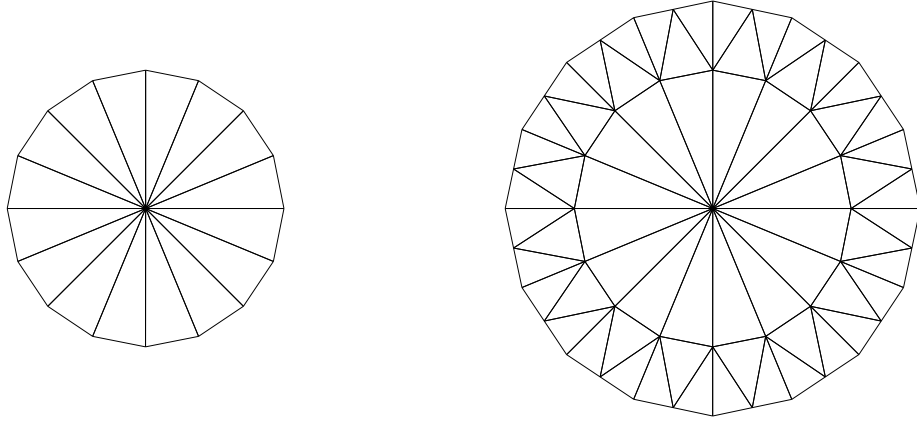


FIG. 6.1 – Deux représentations d’une fissure circulaire par deux ensembles de triangles

La méthode utilisée pour introduire la discontinuité des fonctions de forme de part et d’autre de la fissure est semblable à ce que nous avons fait à deux dimensions. À nouveau, la discontinuité est introduite dans le poids  $w$  et se répercute dans  $\phi$  en diminuant le poids d’un nœud en un point s’il est caché par la fissure.

Nous pouvons ici aussi utiliser un critère de visibilité, un critère de diffraction ou un critère de transparence. Les deux premiers critères sont présentés dans Sukumar *et al.* (1997) dans le cadre des fissures planes et statiques en se limitant à deux cas simples alors que Krysl et Belytschko (1999) utilisent seulement le critère le plus simple de visibilité pour les fissures gauches. Ce dernier article est le seul qui montre de la simulation par méthode sans maillage de propagation de fissures à trois dimensions à notre connaissance. Les critères de la méthode à deux dimensions sont généralisés ci-dessous et illustrés sur la figure 6.2.

**Critère de visibilité** Le poids du nœud I au point B est nul si le segment qui les joint est coupé par la fissure. Ce critère introduit bien la discontinuité des fonctions de forme de part et d’autre de la fissure mais aussi le long de nombreuses surfaces qui passent par un nœud et un segment du front.

**Critère de diffraction** Si le segment qui joint le nœud I au point B est coupé par la fissure, la distance normalisée

$$s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i} \quad (6.1)$$

qui intervient dans la fonction poids

$$w_i(\mathbf{x}) = f_4(s) \quad (6.2)$$

où  $f_4$  est la spline d’ordre 4 (3.39) est remplacée par la longueur normalisée du plus court chemin qui va de I à B en s’appuyant sur le front de fissure :

$$s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_c\| + \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_i\|}{d_i} \quad (6.3)$$

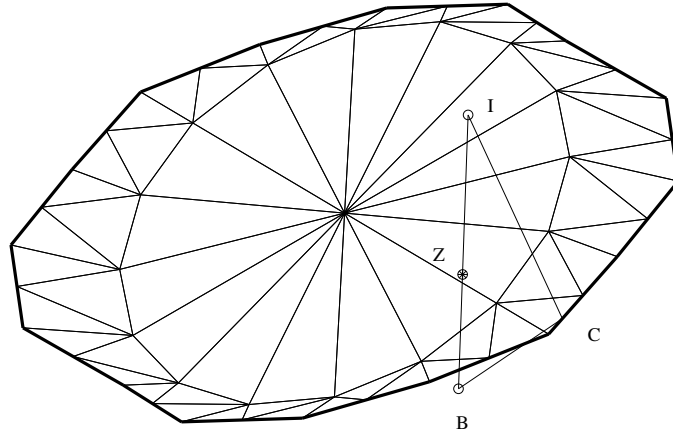


FIG. 6.2 – Critères de visibilité, de diffraction et de transparence à trois dimensions

**Critère de transparence** Si le segment qui joint le nœud I au point B est coupé par la fissure, la distance normalisée est allongée par une fonction de transparence qui dépend de la distance entre le front et le point Z d'intersection du segment avec la fissure :

$$s = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}{d_i} + f_t(\|\mathbf{x}_z - \mathbf{x}_c\|) \quad (6.4)$$

avec  $f_t(0) = 0$  et  $f_t$  croissant. Pour appliquer ce critère, il est nécessaire de déterminer non seulement s'il y a intersection mais aussi le point Z d'intersection et en plus, de calculer la distance de Z à chacun des segments du front et de retenir la plus petite qui sera la variable de la fonction de transparence.

**Implémentation du critère de diffraction** Comme à deux dimensions et pour les mêmes raisons, nous nous sommes fixés sur le critère de diffraction. Pour mettre en œuvre le critère, la fonction à implémenter est essentiellement celle qui fait le décompte du nombre d'intersections entre un segment et un ensemble de triangles. Pour déterminer si un segment de vecteur position  $\mathbf{m}$  et de vecteur directeur  $\mathbf{d}$  a une intersection avec un triangle de vecteur position  $\mathbf{p}$  et de vecteurs directeurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  (voir figure 6.3), il faut que les conditions suivantes soient simultanément vérifiées<sup>1</sup> :

$$\frac{[\mathbf{m} - \mathbf{p}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}]} \geq 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m} - \mathbf{p}, -\mathbf{d}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}]} \geq 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{[\mathbf{m} - \mathbf{p}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}]} + \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{m} - \mathbf{p}, -\mathbf{d}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}]} \leq 1 \quad (6.7)$$

$$-1 \leq \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{m} - \mathbf{p}]}{[\mathbf{a}, \mathbf{b}, -\mathbf{d}]} \leq 1 \quad (6.8)$$

Si le nombre d'intersections ainsi comptées est impair, nous faisons une boucle sur l'ensemble des segments de droite qui forment le front, calculons la longueur du

<sup>1</sup> $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z}$

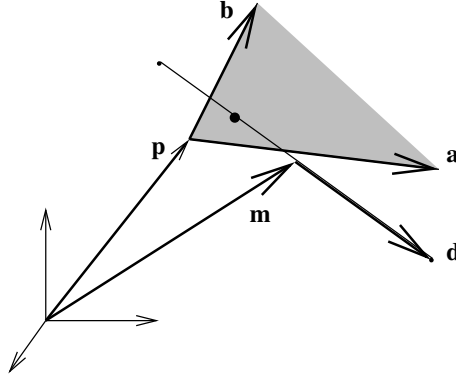


FIG. 6.3 – Vecteurs de position et vecteurs directeurs d'un segment et d'un triangle

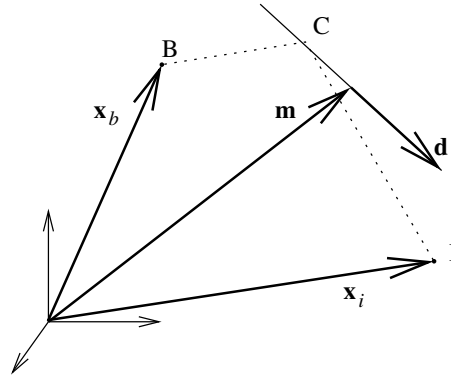


FIG. 6.4 – Chemin de I à B s'appuyant sur un segment

chemin du nœud au point d'évaluation qui s'appuie sur chaque segment et retenons le plus court. L'algorithme pour calculer la longueur de ce chemin est le suivant. Soit un segment de vecteur directeur  $\mathbf{d}$  et dont le milieu a un vecteur position  $\mathbf{m}$  (voir figure 6.4). Il a pour équation

$$\mathbf{m} + l\mathbf{d} = 0 \quad (6.9)$$

où la coordonnée  $l$  varie de  $-1$  à  $1$ . Les points les plus proches du nœud I et du point B se trouvent respectivement aux coordonnées suivantes

$$l_i = \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|^2} \quad l_b = \frac{(\mathbf{x}_b - \mathbf{m}) \cdot \mathbf{d}}{\|\mathbf{d}\|^2} \quad (6.10)$$

La distance entre la droite qui supporte le segment et le nœud I d'une part et le point B d'autre part sont respectivement

$$d_i = \|\mathbf{m} + l_i\mathbf{d} - \mathbf{x}_i\| \quad d_b = \|\mathbf{m} + l_b\mathbf{d} - \mathbf{x}_b\| \quad (6.11)$$

Nous trouvons alors la coordonnée du pivot C par lequel passe le chemin le plus court entre I et B qui s'appuie sur la droite en exprimant que la droite doit faire le même angle avec CI qu'avec CB :

$$l_c = \frac{d_a l_b + d_b l_a}{d_a + d_b} \quad (6.12)$$

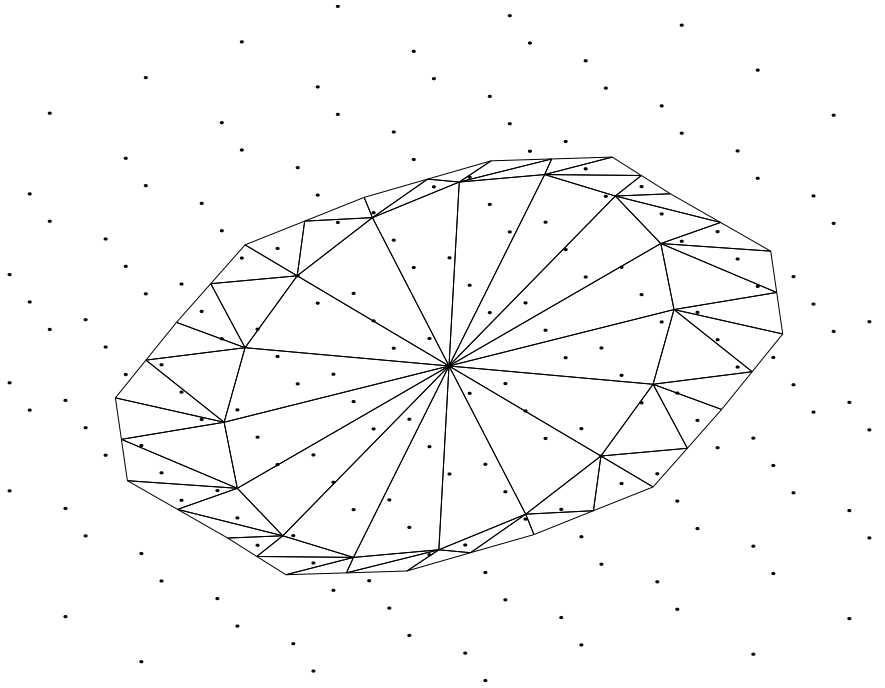


FIG. 6.5 – Distribution nodale régulière de base

et la coordonnée du pivot est

$$\mathbf{x}_c = \mathbf{m} + l_c \mathbf{d} \quad (6.13)$$

La longueur du chemin est finalement

$$\|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_i\| + \|\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_b\| \quad (6.14)$$

Pour trouver la position du pivot pour le chemin qui s'appuie sur le *segment* de droite, nous utilisons les formules précédentes mais nous nous limitons à la valeur  $l_c = 1$  (resp.  $l_c = -1$ ) si  $l_c > 1$  (resp.  $l_c < -1$ ).

Comme on le voit, l'application du critère de diffraction est nettement plus lourde qu'à deux dimensions. Il est encore plus important à trois dimensions d'appliquer l'optimisation décrite à la fin de 4.1 qui consiste à marquer avant le calcul les nœuds dont le domaine est coupé par une fissure pour n'appliquer l'algorithme décrit ci-dessus que pour ceux-ci.

## 6.2 Distribution nodale

Comme à deux dimensions, nous utilisons une distribution nodale régulière, où les nœuds sont placés aux intersections d'une grille d'espacement constant. La distribution est illustrée sur la figure 6.5. Même s'il est bien entendu qu'il serait plus efficace de densifier les nœuds autour de la fissure et là où elle va se propager, nous utilisons la distribution régulière qui présente l'avantage de servir de trame pour l'intégration et avec laquelle le choix des rayons des supports des fonctions de forme est simple. Nous prendrons en compte la singularité des contraintes par un enrichissement des fonctions de forme.

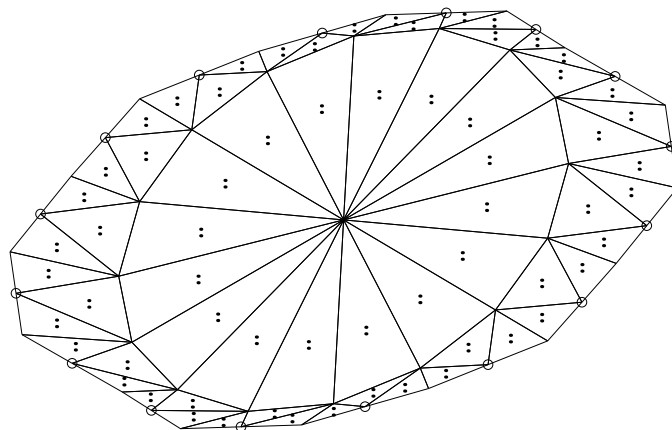


FIG. 6.6 – Nœuds ajoutés à la distribution régulière

En suivant toujours la méthode mise au point à deux dimensions, nous apportons deux « corrections » à la distribution nodale de base. D’abord, si un nœud est situé précisément sur la fissure, il est dédoublé. Ensuite, nous ajoutons un nœud au centre de chaque triangle de chaque côté de la fissure pour éviter les zones ombrées de la figure 4.9 où l’approximation MLS est mal définie. Ces nœuds supplémentaires sont les points sur la figure 6.6.

### 6.3 Enrichissement en front de fissure

Comme à deux dimensions, nous voulons tenir compte du comportement connu des champs de déplacement et de contrainte en front de fissure pour enrichir l’approximation. Un enrichissement intrinsèque complet de la base (4.15) est utilisé dans Sukumar *et al.* (1997) avec  $r$  la distance au front de la fissure et  $\theta$  l’angle dans le plan normal à la fissure qui passe par le point d’évaluation. De bons résultats sont obtenus dans cet article pour le problème d’une fissure circulaire et d’une fissure rectangulaire débouchante mais le coût de ces calculs doit sans aucun doute être fortement élevé à cause de l’utilisation d’une base de taille 8. Cet article ne présente pas d’exemples de fissure gauche ni de propagation. Dans le seul article qui traite de la propagation de fissures gauches à trois dimensions, Krysl et Belytschko (1999) n’utilisent pas d’enrichissement.

Dans cette thèse, nous utilisons à nouveau la technique d’enrichissement des fonctions de forme par l’intermédiaire des fonctions poids. À deux dimensions, il suffisait de placer les trois nœuds de poids spécial à la pointe de la fissure mais dans le cas tridimensionnel, il est nécessaire de placer ces nœuds en plusieurs points du front de fissure. Les degrés de liberté associés aux fonctions de forme enrichies aux différents points du front auront en général des valeurs différentes. Ils permettent ainsi de correctement représenter des facteurs d’intensité de contrainte et une ouverture de la fissure variables le long du front. Nous choisissons de placer les nœuds enrichis au milieu des segments qui forment le front, comme l’illustrent les cercles sur la figure 6.6.

Les trois fonctions pour les poids spéciaux sont semblables au cas bidimension-



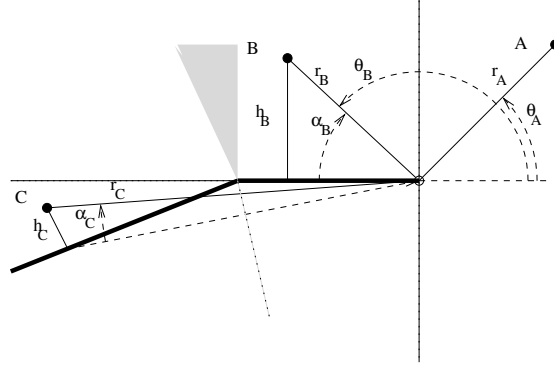


FIG. 6.7 – Transformation angulaire si la fissure fait un angle

nel :

$$w_c(\mathbf{x}) = \alpha \sqrt{\frac{r}{d_{enr}}} \cos\left(\frac{\theta'}{2}\right) f_4(s) \quad (6.15)$$

$$w_p(\mathbf{x}) = \alpha \sqrt{\frac{r}{d_{enr}}} \left[1 + \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right] f_4(s) \quad (6.16)$$

$$w_m(\mathbf{x}) = \alpha \sqrt{\frac{r}{d_{enr}}} \left[1 - \sin\left(\frac{\theta'}{2}\right)\right] f_4(s) \quad (6.17)$$

où

- la distance normalisée  $s$  est mesurée depuis la position du nœud enrichi et  $r$  est la plus courte distance par rapport à la courbe du front de fissure, qui est mesurée dans le plan  $xy$  normal au front passant par le point courant. À trois dimensions au contraire du cas bidimensionnel,  $s \neq \frac{r}{d_{enr}}$  ;
- l'angle transformé  $\theta'$  décrit ci-dessous est mesuré lui aussi dans le plan  $xy$  ;
- le rayon  $d_{enr}$  doit être suffisamment grand pour qu'il y ait un recouvrement entre les sphères supports de deux nœuds enrichis voisins.

Les fonctions angulaires que nous avons choisies en nous basant sur les champs asymptotiques des modes I et II conviennent aussi pour le champ du mode III qui présente une variation angulaire du même type :

$$u_z = \frac{K_{III}}{\mu} \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (6.18)$$

À deux dimensions, nous limitons la taille des support des nœuds enrichis comme sur la figure 4.12 pour nous assurer que ces supports ne contiennent aucun angle de la fissure. À trois dimensions, si la fissure gauchit, il n'est plus possible d'avoir une telle assurance dans tous les plans normaux au front de fissure. Une transformation de l'angle  $\theta$  en un pseudo-angle  $\theta'$  qui vaut  $\pi$  sur une lèvre et  $-\pi$  sur l'autre est nécessaire pour garantir que les discontinuités surviennent bien de part et d'autre de la fissure et non dans le prolongement de celles-ci. Nous définissons  $\theta'$  de la manière suivante :

$$\theta' = \begin{cases} \theta & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) & \text{au-dessus de la fissure} \\ -\pi + \arcsin\left(\frac{h}{r}\right) & \text{en-dessous de la fissure} \end{cases}$$

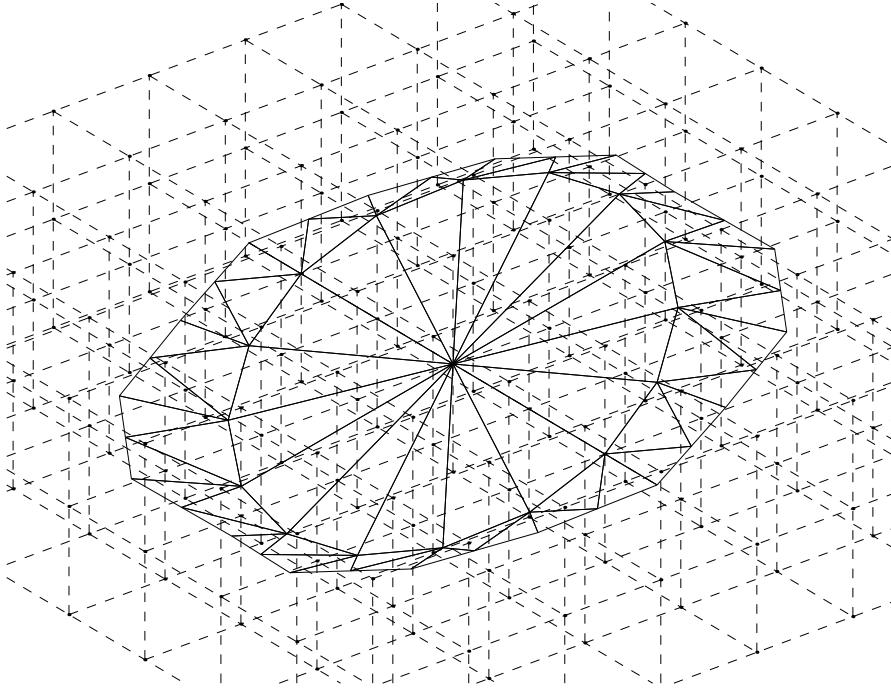


FIG. 6.8 – Division en cellules non-conformes à la fissure

avec  $h$  la distance entre le point et la fissure. Différents cas sont illustrés sur la figure 6.7 :

- pour le point A devant la fissure, nous prenons simplement  $\theta'_A = \theta_A$  ;
- pour le point B au-dessus de la fissure avant l'angle,  $\theta'_B = \pi - \alpha_B$  où  $\alpha_B$  est mesuré depuis la fissure et nous trouvons  $\theta'_B = \theta_B$  ;
- pour le point C après l'angle, la transformation est appliquée et  $\theta'_C$  est un peu inférieur à  $\pi$  (alors que  $\theta_C$  est négatif) ;
- $\theta' \rightarrow \pi$  quand  $h \rightarrow 0_+$  comme souhaité.

Si nous n'appliquons pas la transformation, les fonctions poids seraient discontinues le long de la ligne horizontale pointillée.  $\theta'$  est continu le long de la ligne pointillée verticale où  $r = h$  donc  $\theta' = \pm \frac{\pi}{2}$ .  $\theta'$  est certes constant dans la région ombrée et de dérivée discontinue le long de la ligne pointillée oblique en-dessous de la fissure mais la transformation est bien continue partout comme souhaité.

## 6.4 Intégration

Comme à deux dimensions, la distribution régulière des nœuds fournit une base naturelle sur laquelle former la division en cellules qui est illustrée sur la figure 6.8. Nous réalisons une intégration de Gauss dans chaque cellule. Ici aussi, un nombre important de points de Gauss est nécessaire pour intégrer correctement les discontinuités et la singularité de certains intégrandes. Nous choisissons de prendre  $8 \times 8 \times 8$  points de Gauss dans chaque cellule.

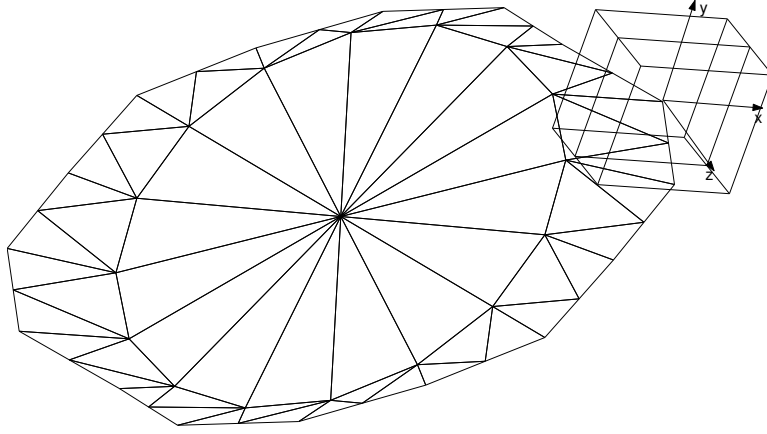


FIG. 6.9 – Domaine pour le calcul des intégrales d'interaction

## 6.5 Calcul des facteurs d'intensité de contrainte

À chaque pas de la simulation, il faut extraire de la solution obtenue la valeur des facteurs d'intensité de contrainte des modes I, II et III en plusieurs points du front. Nous choisissons de calculer ces facteurs aux extrémités de chaque segment définissant le front. Ce sont en effet ces points-là qui serviront de guides pour déterminer l'emplacement du front au pas suivant. En chacun de ces points, nous plaçons tour à tour un repère dont l'axe  $x$  se trouve dans le plan normal au front dans le prolongement de la fissure, l'axe  $y$  perpendiculaire à l'axe  $x$  dans ce même plan normal et l'axe  $z$  orthogonal aux deux axes précédents. Nous pourrions appliquer la théorie de l'intégrale d'interaction sur un domaine du cas bidimensionnel en intégrant sur un carré dans le plan  $xy$  mais nous avons constaté de meilleurs résultats en intégrant sur un parallélépipède, ce qui a pour effet de moyennner encore davantage les oscillations présentes dans la solution. Le parallélépipède et le repère pour un certain point du front sont illustrés sur la figure 6.9.

Le facteur d'intensité de contrainte du mode I s'obtient donc par

$$K_I = -\frac{E}{2(1-\nu^2)} \int_V \left( W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right) \frac{\partial q}{\partial x_j} dV \quad (6.19)$$

où  $V$  est le parallélépipède et le poids  $q$  est donné par

$$q = \left(1 - \frac{|x|}{\frac{c}{2}}\right) \left(1 - \frac{|y|}{\frac{c}{2}}\right) \left(1 - \frac{|z|}{\frac{l}{2}}\right) \quad (6.20)$$

où  $l$  est la longueur du côté du parallélépipède dans la direction  $z$ . Dans l'équation (6.19), les champs de déplacement et de contrainte (1) sont ceux de la solution numérique obtenue et les champs de déplacement et de contrainte (2) sont ceux d'un mode I pur d'intensité unitaire. Deux autres intégrales d'interaction entre la solution numérique et un mode II pur d'une part et un mode III pur d'autre part permettent bien sûr d'obtenir  $K_{II}$  et  $K_{III}$  (pour le mode III, le facteur devant l'intégrale est  $\mu$  plutôt que  $\frac{E}{2(1-\nu^2)}$ ).

L'intégration est réalisée en divisant le parallélépipède en  $2 \times 2 \times 2$  cellules et en intégrant avec  $8 \times 8 \times 8$  points de Gauss dans chacune.

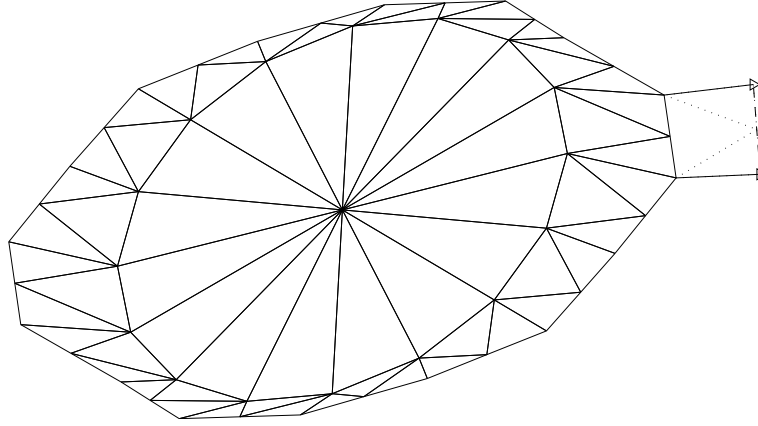


FIG. 6.10 – Propagation de la fissure

La méthode simple d'extension de la théorie bidimensionnelle des intégrales d'interaction décrite dans cette section conduit à de bons résultats. Notons toutefois que selon Gosz et Moran (2002), des termes supplémentaires doivent être ajoutés à l'intégrale d'interaction dans le cas des fissures gauches par rapport au cas des fissures bidimensionnelles ou tridimensionnelles planes. L'usage de cette théorie serait une extension potentiellement intéressante de notre thèse.

## 6.6 Propagation des fissures

La propagation des fissures tridimensionnelles est modélisée en déterminant la nouvelle position des extrémités des segments représentant le front où les  $K$  ont été calculés par extension de la théorie bidimensionnelle, puis en reliant ces nouveaux points par des segments pour former le nouveau front et enfin en construisant des triangles entre l'ancien front et le nouveau pour représenter la nouvelle fissure.

Nous recherchons la nouvelle position d'un point du front dans le plan  $xy$  normal au front à ce point. Il convient de déterminer la direction de propagation par rapport à l'axe  $x$  et la longueur de l'incrément de propagation. La direction est trouvée comme dans le cas bidimensionnel en admettant que le mode III n'a pas d'influence sur cette direction de propagation :

$$\theta_p = 2 \arctan \left( \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}} \right) \quad (6.21)$$

Par contre, nous donnons bien un rôle au mode III pour l'intensité de la propagation, par l'intermédiaire du facteur d'intensité de contrainte du mode I équivalent au mode mixte considéré. Celui-ci est obtenu en combinant  $K_{III}$  avec le facteur équivalent du cas bidimensionnel de telle sorte que le taux de restitution d'énergie de  $K_{\text{eq}}$  soit le même que celui du mode mixte. En utilisant (2.68) et (4.24), nous obtenons

$$K_{\text{eq}} = \sqrt{\left( K_I \cos^3 \frac{\theta_p}{2} - 3K_{II} \cos^2 \frac{\theta_p}{2} \sin \frac{\theta_p}{2} \right)^2 + \frac{E}{(1-\nu^2)2\mu} K_{III}^2} \quad (6.22)$$

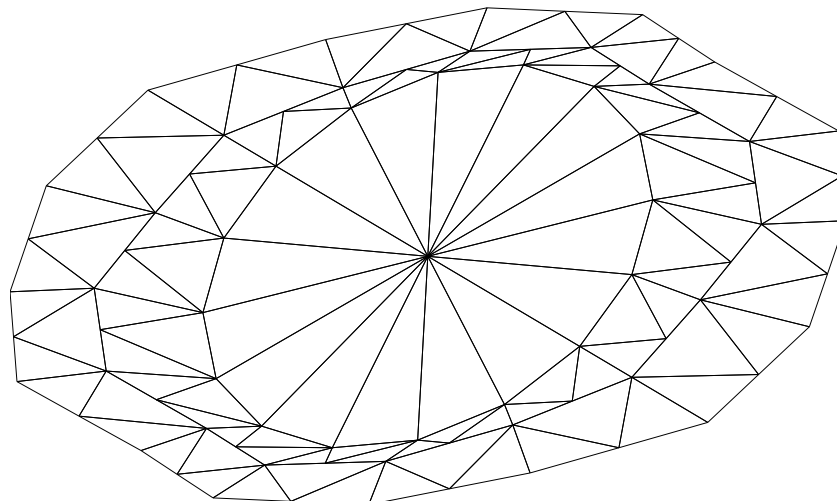


FIG. 6.11 – Nouvelle fissure

Les longueurs des incréments aux différents points du front sont obtenues à partir de ces facteurs équivalents par le même raisonnement que dans le cas bidimensionnel lorsqu'il y a plusieurs pointes de fissure. Nous désignons comme point principal celui qui a le facteur équivalent le plus élevé, lui donnons comme longueur d'incrément une certaine valeur au choix de l'utilisateur  $\Delta a_{\text{principale}}$  et déterminons les longueurs plus courtes des incréments aux autres points par la loi de Paris :

$$\Delta a_i = \Delta a_{\text{principale}} \left( \frac{\Delta K_{\text{eq},i}}{\Delta K_{\text{eq,principale}}} \right)^m \quad (6.23)$$

La méthode de propagation est illustrée sur la figure 6.10. Les déplacements de deux points voisins du front sont représentés par les deux flèches. Le nouveau front qui relie ces nouvelles positions est représenté en ligne discontinue. Trois nouveaux triangles sont construits pour mailler le quadrangle (généralement gauche) formé par les deux anciennes positions et les deux nouvelles. Ils sont représentés en ligne pointillée. Le résultat après que cette méthode est appliquée à l'ensemble du front est illustré sur la figure 6.11.

Il reste finalement à énoncer le critère de ruine, qui est le même qu'à deux dimensions. La ruine se produit si le facteur d'intensité de contrainte équivalent, au point du front principal et correspondant à la charge maximale du cycle de charge dépasse la ténacité :

$$K_{\text{eq,max,principale}} > K_{Ic} \quad (6.24)$$

## 6.7 Comparaison avec la méthode à deux dimensions

La description de la méthode sans maillage en mécanique de la rupture à trois dimensions qui précède est assez courte car il n'était pas nécessaire de répéter tous les développements détaillés de la méthode à deux dimensions. Cela ne doit pas nous faire perdre de vue que la méthode à trois dimensions est nettement plus compliquée

à implémenter qu'à deux dimensions et qu'elle est hautement plus coûteuse en temps de calcul. Les principales raisons de cette augmentation sont les suivantes :

- bien sûr, la taille de la matrice de raideur augmente car il y a beaucoup plus de degrés de liberté à précision égale à trois dimensions que à deux ;
- il y a aussi beaucoup plus de points d'intégration nécessaires pour construire cette matrice ;
- la description de la fissure demande aussi plus de paramètres et la méthode de diffraction devient plus coûteuse. Une fissure à deux dimensions est en effet typiquement représentée par une dizaine de segments alors qu'il faudra des centaines de triangles à trois dimensions ;
- le front de fissure est une courbe et non plus un point avec pour conséquences :
  - des difficultés pour trouver le chemin qui contourne la fissure dans la méthode de diffraction,
  - un enrichissement qui ne se fait plus en un point mais en plusieurs points répartis le long du front,
  - des facteurs d'intensité de contrainte qui doivent être calculés en plusieurs points répartis le long du front,
  - une extension de la fissure en plusieurs points également et dans des directions différentes.

# Chapitre 7

## Résultats numériques pour les problèmes à trois dimensions

Ce chapitre présente plusieurs exemples de pièces fissurées à trois dimensions.

Au début, quelques exemples statiques simples sont étudiés afin de comparer la méthode sans maillage classique à notre méthode enrichie. La comparaison est menée en se basant sur des valeurs de référence pour le facteur d'intensité de contrainte ou sur des considérations énergétiques en l'absence de telles références. Les exemples sont ceux d'une fissure traversante et débouchante en traction à la section 7.1 puis d'une fissure intérieure circulaire dans un cube en traction à la section 7.2, en cisaillement à la section 7.3 et en torsion à la section 7.4

Ensuite, deux problèmes de propagation sont résolus : une fissure inclinée soumise à traction qui s'étend en gauchissant à la section 7.5 et une paire de fissures qui se propagent l'une vers l'autre en gauchissant jusqu'au recouvrement à la section 7.6.

Nous tirons quelques conclusions à la section 7.7

### 7.1 Fissure débouchante en traction

Le premier exemple de pièce fissurée en trois dimensions est en fait le même que celui de la fissure débouchante de la section 5.1.2. Un cube de côté  $2W = 2$  présente une fissure plane de vecteur normal  $z$ , droite, de longueur  $a$  et débouchant dans la face  $y = -1$ . Le déplacement normal sur les faces  $x = \pm 1$  est fixé à zéro pour obtenir un état plan de déformation. La traction sur les faces  $z = \pm 1$  vaut  $\sigma = 1$ . Les propriétés matérielles sont  $E = 1$  et  $\nu = 0,3$ .

L'équation de la fissure est donc

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq -1 + a \\ z = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Celle-ci est représentée par 40 triangles de la manière illustrée sur la figure 7.1. Nous étudions ce problème pour des fissures de longueur 0,2 à 1,6 par pas de 0,2.

Une distribution de  $21 \times 21 \times 21$  nœuds uniformément répartis est utilisée. Les nœuds qui sont situés sur la fissure sont dédoublés. Le problème est résolu d'une part sans nœud ajouté et d'autre part avec 21 triplets de nœuds spéciaux régulièrement

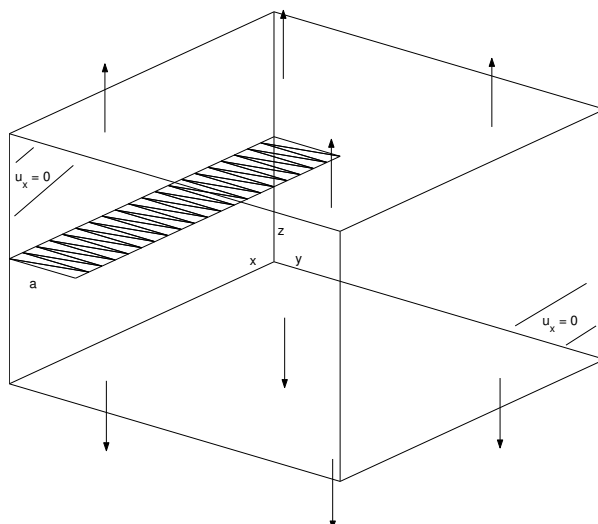
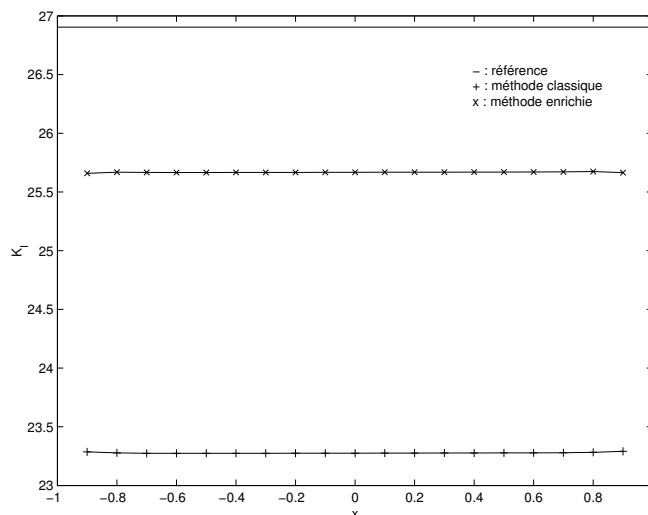


FIG. 7.1 – Fissure débouchante dans un cube en traction

FIG. 7.2 – Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure débouchante ( $a = 1, 6$ )

disposés le long du front de fissure (autrement dit aux sommets des triangles de la représentation de la fissure illustrée sur la figure). Le rayon des supports de chaque nœud (normal ou enrichi) vaut  $0, 14$ . L'intégration pour calculer la matrice de raideur est réalisée en divisant le cube en  $20 \times 20 \times 20$  cellules, avec  $8 \times 8 \times 8$  points de Gauss dans chaque cellule. Ce problème possède une condition sur le déplacement sur deux faces, qui est imposée par la technique du principe variationnel modifié sans multiplicateur de Lagrange supplémentaire de la section 3.3.2. Sur les quatre faces qui demandent une intégration pour les conditions aux limites,  $8 \times 8$  points de Gauss dans  $20 \times 20$  cellules sont utilisés. L'intégration pour calculer l'intégrale  $J$  en utilisant la formulation sur un domaine se fait tour à tour sur 19 cubes centrés sur un point du front, de côté  $0, 2$ , divisés en  $2 \times 2 \times 2$  cellules avec  $8 \times 8 \times 8$  points de Gauss dans chacune. Ces 19 points sont les sommets des triangles sur le front de fissure à l'exclusion des deux situés sur les faces  $x = \pm 1$ .



Longueur de la fissure	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$F_I$ — référence	1,23	1,49	1,85	2,32	3,01	4,15	6,40	12,0
$F_I$ — sans enrichissement	1,157	1,398	1,733	2,174	2,799	3,812	5,759	10,383
Erreur — sans enrichissement	5,9%	6,2%	6,3%	6,3%	7,0%	8,1%	10,0%	13,5%
$F_I$ — avec enrichissement	1,224	1,490	1,852	2,327	3,002	4,108	6,255	11,449
Erreur —avec enrichissement	0,51%	0,03%	0,09%	0,30%	0,25%	1,0%	2,3%	4,6%

TAB. 7.1 – Facteurs d'intensité de contrainte normalisés pour la fissure débouchante

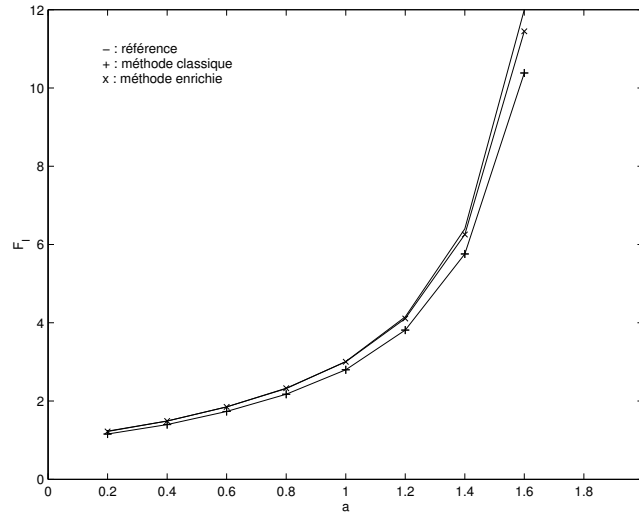


FIG. 7.3 – Facteurs d'intensité de contrainte normalisés pour la fissure débouchante

La solution de ce problème est connue :  $K_I$  est constant le long du front et vaut

$$K_I = F_I(\alpha)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (7.2)$$

avec  $\alpha = \frac{a}{W}$ . Le facteur de forme  $F_I$  est le même qu'à deux dimensions en raison des conditions aux limites choisies qui reviennent à un état plan de déformation. La solution numérique obtenue avec les deux méthodes le long du front de fissure dans le cas  $a = 1,6$  est tracée sur la figure 7.2. Nous constatons que nous avons bien pratiquement un facteur d'intensité de contrainte constant le long du front. Puisque  $K_I$  est pratiquement constant, nous nous contentons de donner dans le tableau 7.1 la moyenne du facteur normalisé  $F_I$  le long du front pour les différentes longueurs de fissure. Ces valeurs sont aussi représentées sur la figure 7.3.

Comme à deux dimensions, nous observons une amélioration importante des résultats grâce à la présence des nœuds enrichis. Pour les fissures les plus courtes, l'erreur passe typiquement de plus de 5% à moins de 1%. Le surcoût en temps de calcul est de l'ordre de 15%, ce qui est peu pour une telle amélioration des résultats pour un problème tridimensionnel.

## 7.2 Fissure circulaire en traction

Une pièce cubique de côté  $2W = 2$  présente une fissure intérieure circulaire de rayon  $a$  variant de 0,1 à 0,7. La fissure est représentée par les 16 triangles de la manière illustrée sur la figure 7.4. La distribution nodale régulière et le schéma d'intégration sont les mêmes que pour l'exemple précédent. Pour la méthode enrichie, 16 triplets de nœuds sont placés aux sommets des triangles sur le front. Le rayon des sphères qui servent de supports aux poids enrichis varie avec la taille de la fissure, à la différence du problème précédent où nous le prenions égal au rayon des nœuds normaux. Ici, nous prenons  $d_{enr} = 1,4 \cdot \frac{2\pi}{16} \cdot a$  soit 1,4 fois la distance entre deux nœuds enrichis voisins. Ces supports enrichis sont illustrés sur la figure 7.5, où sont montrées les coupes des sphères enrichies par le plan de la fissure. Le facteur d'intensité de contrainte est calculé sur des cubes centrés aux 16 mêmes points que les nœuds enrichis.

La solution de ce problème est

$$K_I = F_I(\alpha, \theta) 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (7.3)$$

où  $\alpha = \frac{a}{W}$  et  $\theta$  est l'angle le long du front. Le facteur de forme vaut 1 pour une fissure de taille négligeable par rapport au côté du cube. Ce facteur normalisé, calculé par les deux méthodes et moyenné sur les 16 points de calcul, est présenté dans le tableau 7.2. Nous ne disposons malheureusement pas de référence pour s'assurer que la méthode enrichie donne bien de meilleurs facteurs d'intensité de contrainte que la méthode classique. Cela semble tout de même bien être le cas puisque nous obtenons des facteurs 3 ou 4% supérieurs par la méthode enrichie, comme cela a toujours été le cas à deux dimensions ou à l'exemple précédent. Pour vérifier que la méthode enrichie donne bien une meilleure approximation, nous nous basons sur l'énergie totale du champ de déplacement obtenu. Nous donnons dans le tableau et sur la figure 7.6 la valeur de  $-E_T$  dont la définition est fournie au chapitre suivant, où nous expliquons que plus cette valeur est élevée plus l'approximation est proche de la solution exacte. Nous pouvons donc conclure que la méthode enrichie donne bien de meilleurs résultats que la méthode classique.

Rayon de la fissure	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$F_I$ — sans enrichissement	1,0036	1,0044	1,0207	1,0251	1,0518	1,1059	1,1770
$-E_T$ — sans enrichissement	4,00126	4,01351	4,05323	4,13555	4,28557	4,53572	4,93374
$F_I$ — avec enrichissement	1,0287	1,0422	1,0516	1,0522	1,0859	1,1354	1,2100
$-E_T$ — avec enrichissement	4,00149	4,01584	4,05841	4,14514	4,30116	4,55736	4,96788

TAB. 7.2 – Facteurs d'intensité de contrainte normalisés et énergies pour la fissure circulaire en traction

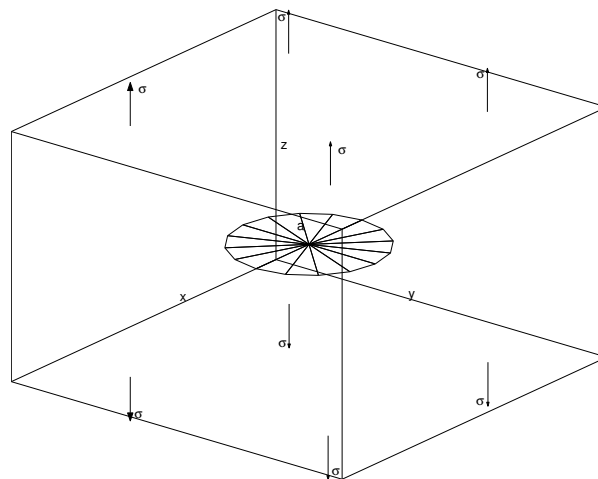


FIG. 7.4 – Fissure circulaire dans un cube en traction

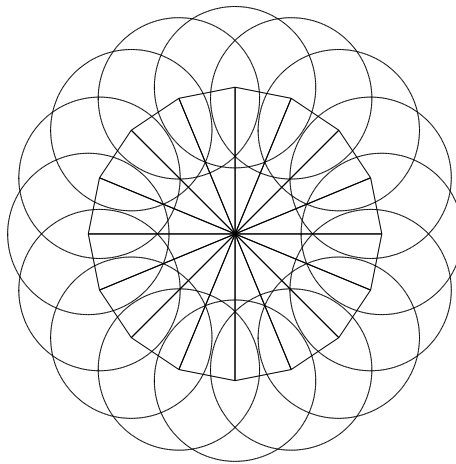


FIG. 7.5 – Supports des nœuds enrichis

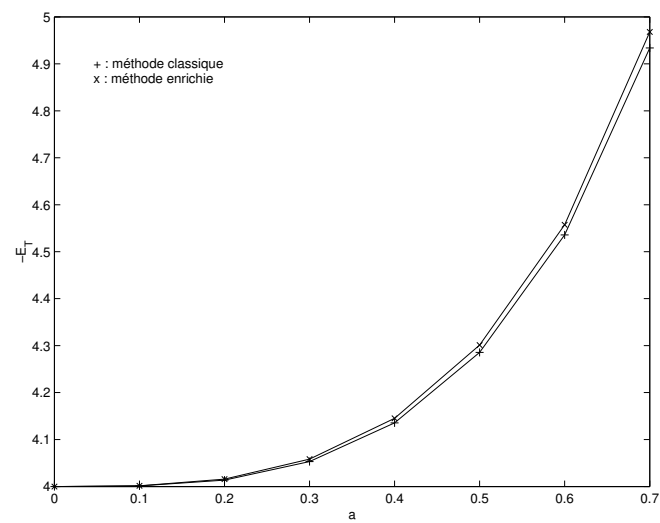


FIG. 7.6 – Énergie pour la fissure circulaire en traction

### 7.3 Fissure circulaire en cisaillement

Pour valider notre méthode en mode mixte, nous utilisons le même problème qu'à la section précédente en changeant uniquement les conditions aux limites. Un cisaillement  $\tau_{xz} = 1$  est imposé sur les faces  $x = \pm 1$  et  $z = \pm 1$ , comme nous l'illustrons sur la figure 7.7. La solution de ce problème est

$$K_I = 0 \quad (7.4)$$

$$K_{II} = -F_{II}(\alpha, \theta)\tau\sqrt{\pi a} \cos \theta \quad (7.5)$$

$$K_{III} = F_{III}(\alpha, \theta)\tau\sqrt{\pi a} \sin \theta \quad (7.6)$$

où  $\theta$  est mesuré depuis l'axe  $x$ . Si  $\alpha \rightarrow 0$ , les facteurs de forme ne dépendent plus de l'angle et  $F_{II} \rightarrow 0,7490$  et  $F_{III} \rightarrow 0,5243$ .

Avec nos dimensions, nous ne pouvons pas supposer que  $\alpha$  est petit et cette référence nous sert simplement de point de repère qualitatif. Nous présentons sur la figure 7.8 les facteurs d'intensité des modes II et III le long du front pour les sept tailles de fissures de rayon de 0,1 à 0,7. Les facteurs obtenus ont bien une variation angulaire en  $-\cos \theta$  pour  $K_{II}$  et  $\sin \theta$  pour  $K_{III}$  comme la référence. Le rapport entre l'intensité du mode II et celle du mode III est aussi du même ordre que ce rapport pour la référence. En valeur absolue, les facteurs d'intensité de contrainte obtenus sont par contre supérieurs à la référence, ce qui reflète l'augmentation de ceux-ci lorsque la fissure s'approche des faces.

La méthode enrichie donne toujours des facteurs d'intensité de contrainte supérieurs de quelques pour-cents à ceux de la méthode classique. Par expérience, cela suggère que la première est plus précise que la seconde. L'augmentation de  $K_{II}$  entre les deux méthodes est supérieure à l'augmentation de  $K_{III}$ . Pour s'assurer que l'approximation fournie par la méthode enrichie est bien meilleure, nous examinons à nouveau l'énergie totale. Celle-ci est donnée dans le tableau 7.3 et tracée sur la figure 7.9. La valeur de  $-E_T$  est toujours supérieure pour l'approximation du déplacement obtenu par la méthode enrichie que pour celui obtenu par la méthode classique. Cela nous indique l'adéquation de la méthode enrichie pour les problèmes de mode mixte.

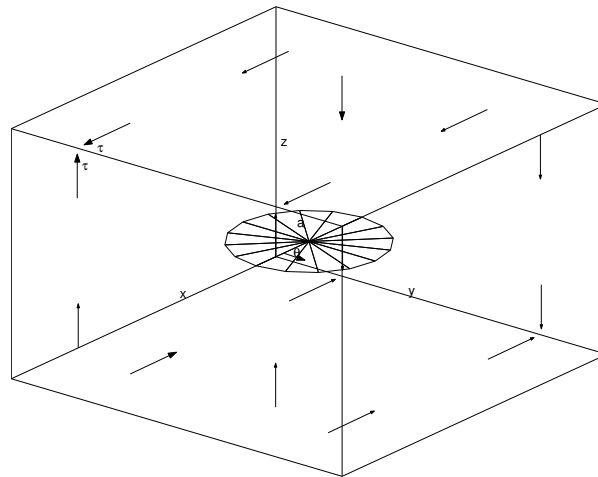


FIG. 7.7 – Fissure circulaire dans un cube en cisaillement

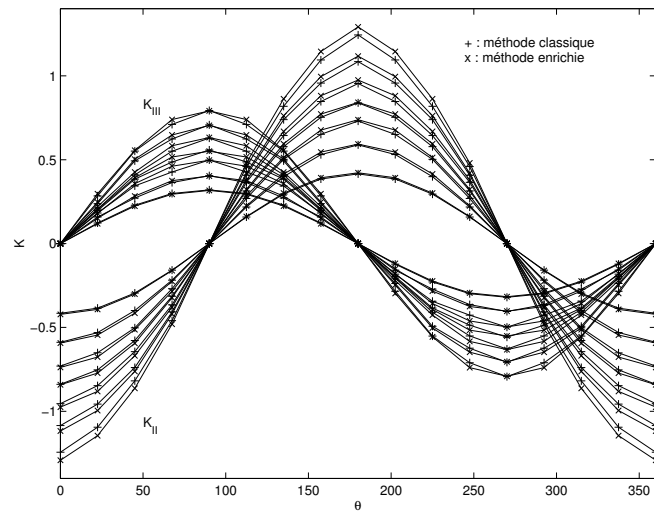


FIG. 7.8 – Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure en cisaillement

Rayon de la fissure	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$-E_T$ — sans enrichissement	10,4012	10,4146	10,4590	10,5503	10,7145	10,9815	11,3932
$-E_T$ — avec enrichissement	10,4016	10,4188	10,4690	10,5698	10,7442	11,0206	11,4548

TAB. 7.3 – Énergie pour la fissure circulaire en cisaillement

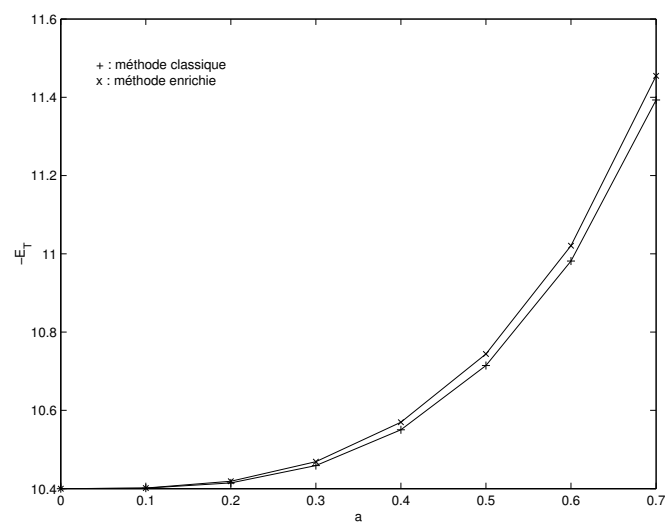


FIG. 7.9 – Énergie pour la fissure circulaire en cisaillement

## 7.4 Fissure circulaire en torsion

Le dernier exemple de fissure statique utilise toujours la même géométrie, distribution nodale et intégration que les deux exemples précédents. Cette fois, ce sont des conditions aux limites sur le déplacement qui sont imposées pour appliquer au cube une torsion plane. Sur les faces  $z = \pm 1$ , comme nous l'illustrons sur la figure 7.10, le déplacement vaut

$$u_x = \gamma yz \quad (7.7)$$

$$u_y = -\gamma xz \quad (7.8)$$

Il s'agit d'un problème de déchirement pur.

Sur la figure 7.11 sont tracés les facteurs d'intensité de contrainte du mode III pour les sept différents rayons de la fissure. Nous constatons que celui-ci est plus élevé en  $\theta = k.90^\circ$  que en  $\theta = (2k + 1).45^\circ$  ( $k$  entier). Cela est dû au fait que les premiers sont plus proches des bords que les seconds et que les forces de cisaillement  $y$  sont plus importantes. La seule référence pour ce type de problème est celle d'une fissure soumise à un moment de torsion  $M_T$  dans un milieu infini où  $K_{III} = \frac{8M_T}{3\pi^{\frac{3}{2}}a^{\frac{5}{2}}}$ . Nous pourrions intégrer la réaction sur les faces où le déplacement est imposé pour obtenir le moment de torsion pour comparer à ce cas mais cela ne nous permettrait pas de déterminer quelle méthode donne le meilleur résultat puisque nous sommes loin de pouvoir négliger la taille de la fissure par rapport à la longueur du côté du cube. Nous constatons que l'augmentation de  $K_{III}$  entre la méthode classique et la méthode enrichie est moins importante que dans les cas précédents. Cela semble être une indication que l'enrichissement n'est pas aussi efficace pour ce type de problème que pour ceux en état plan ou à trois dimensions dominés par le mode I.

La valeur de  $-E_T$  est donnée dans le tableau 7.4 et tracée sur la figure 7.12. Les valeurs sont négatives car les conditions aux limites portent sur le déplacement. En valeur algébrique, la méthode enrichie donne bien des valeurs supérieures à la méthode classique, quelle que soit la taille de la fissure. La différence relative entre les énergies des deux méthodes est toutefois inférieure aux cas précédents. Il faut donc reconnaître que le gain apporté par l'enrichissement est moindre pour le mode III.

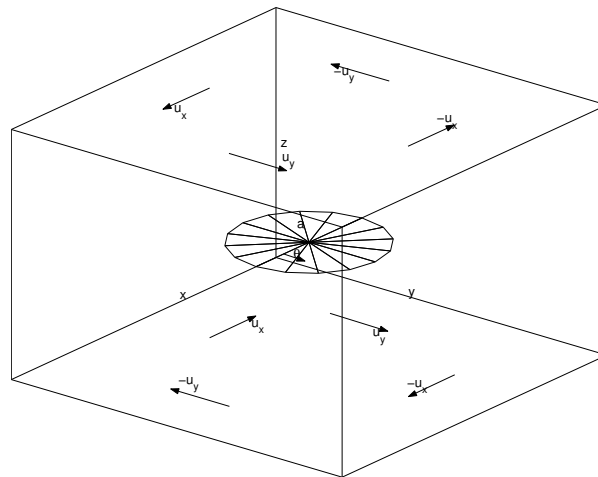


FIG. 7.10 – Fissure circulaire dans un cube en torsion

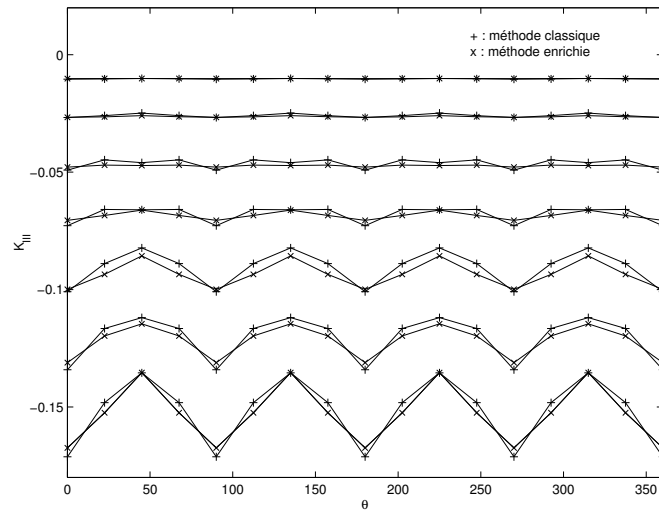


FIG. 7.11 – Facteur d'intensité de contrainte pour la fissure en torsion

Rayon de la fissure	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
$-E_T$ — sans enrich.	-0,866464	-0,866440	-0,866237	-0,865415	-0,863084	-0,857699	-0,847059
$-E_T$ — avec enrich.	-0,866463	-0,866429	-0,866176	-0,865245	-0,862693	-0,857077	-0,845994

TAB. 7.4 – Énergie pour la fissure circulaire en torsion

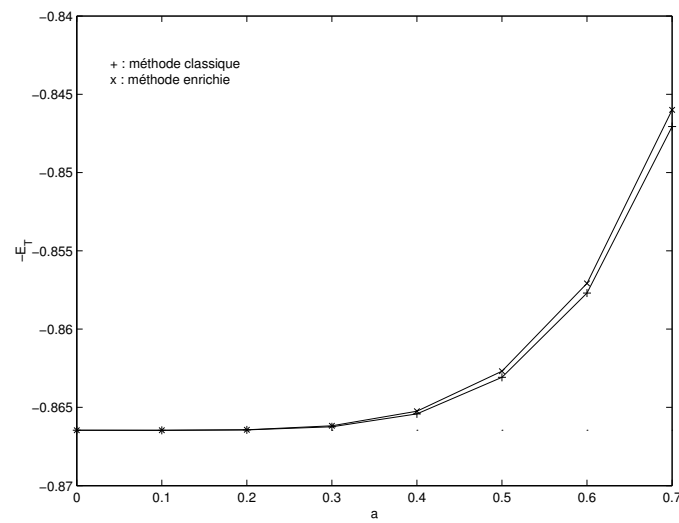


FIG. 7.12 – Énergie pour la fissure circulaire en torsion

## 7.5 Propagation d'une fissure inclinée

Une fissure circulaire de rayon  $a = 0,2$ , inclinée sur l'axe  $x$  d'un angle  $\beta = 30^\circ$  est présente dans un cube soumis à une traction  $\sigma = 1$  sur les faces  $z$ . Nous utilisons toujours la même distribution nodale et le même schéma d'intégration. Nous examinons d'abord les valeurs des facteurs d'intensité de contrainte en fonction de l'angle  $\theta$  obtenues par la méthode classique et la méthode enrichie (la figure 7.13 montre l'origine depuis laquelle nous comptons cet angle). Nous montrons ensuite la propagation prédite par la méthode enrichie uniquement.

Si la taille de la fissure est négligeable par rapport à la taille du cube, la solution exacte pour les facteurs d'intensité de contrainte est connue :

$$K_I = 2\sigma \cos^2 \beta \sqrt{\frac{a}{\pi}} \quad (7.9)$$

$$K_{II} = -\frac{4\sigma}{2-\nu} \sin \beta \cos \beta \sqrt{\frac{a}{\pi}} \sin \theta \quad (7.10)$$

$$K_{III} = -\frac{4(1-\nu)\sigma}{2-\nu} \sin \beta \cos \beta \sqrt{\frac{a}{\pi}} \cos \theta \quad (7.11)$$

Nous traçons sur la figure 7.14 les résultats obtenus par les deux méthodes ainsi que cette référence en pointillés et observons un bon accord. Les facteurs d'intensité de contrainte réels sont supérieurs à ceux de l'hypothèse de la pièce infinie de quelques pour-cents. Nous n'avons malheureusement pas de référence pour les facteurs de forme dans ce cas non plus. Si nous remontons la courbe de référence pour le mode I de quelques pour-cents, nous pouvons conclure que la méthode enrichie fournit bien un meilleur résultat. Cette conclusion est confirmée en examinant les énergies des champs de déplacement obtenu : la valeur de  $-E_T$  pour la méthode classique (4,01004) est inférieure à celle pour la méthode enrichie (4,01214).

La supériorité de la méthode enrichie étant acquise, nous utilisons uniquement cette méthode pour étudier la propagation par fatigue lorsqu'une traction oscillant entre 0 et 1 est appliquée. Nous utilisons les mêmes propriétés matérielles qu'à deux dimensions. En pratique, comme nous représentons seulement la géométrie de la

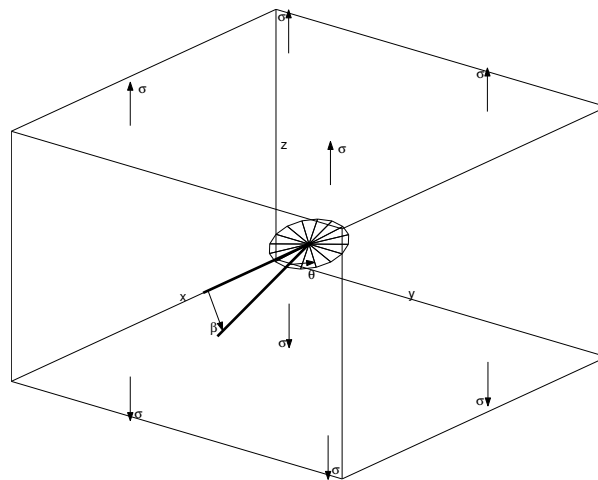


FIG. 7.13 – Fissure circulaire inclinée dans un cube en traction



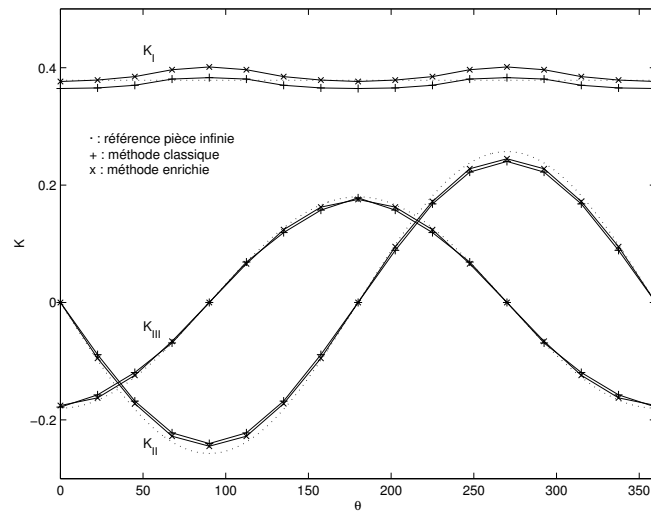


FIG. 7.14 – Facteurs d'intensité de contrainte pour la fissure inclinée

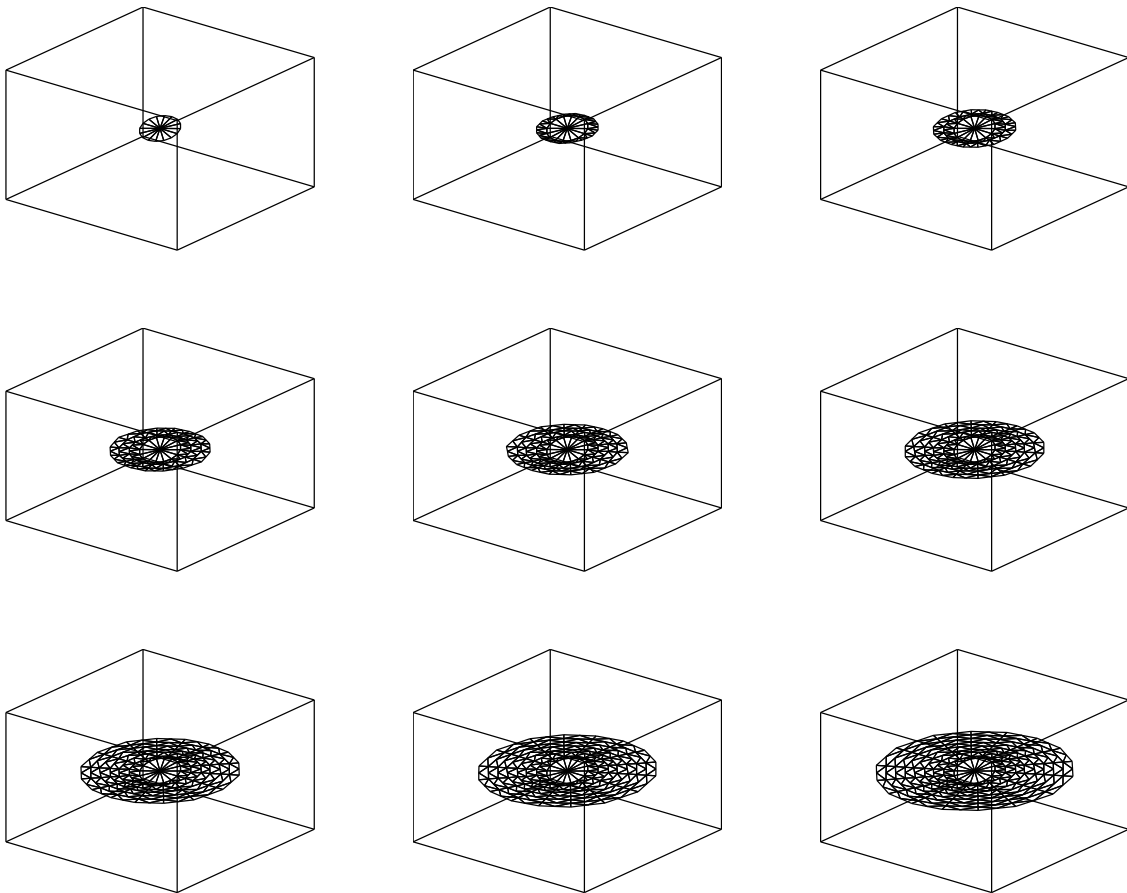


FIG. 7.15 – Neuf pas de la propagation de la fissure inclinée

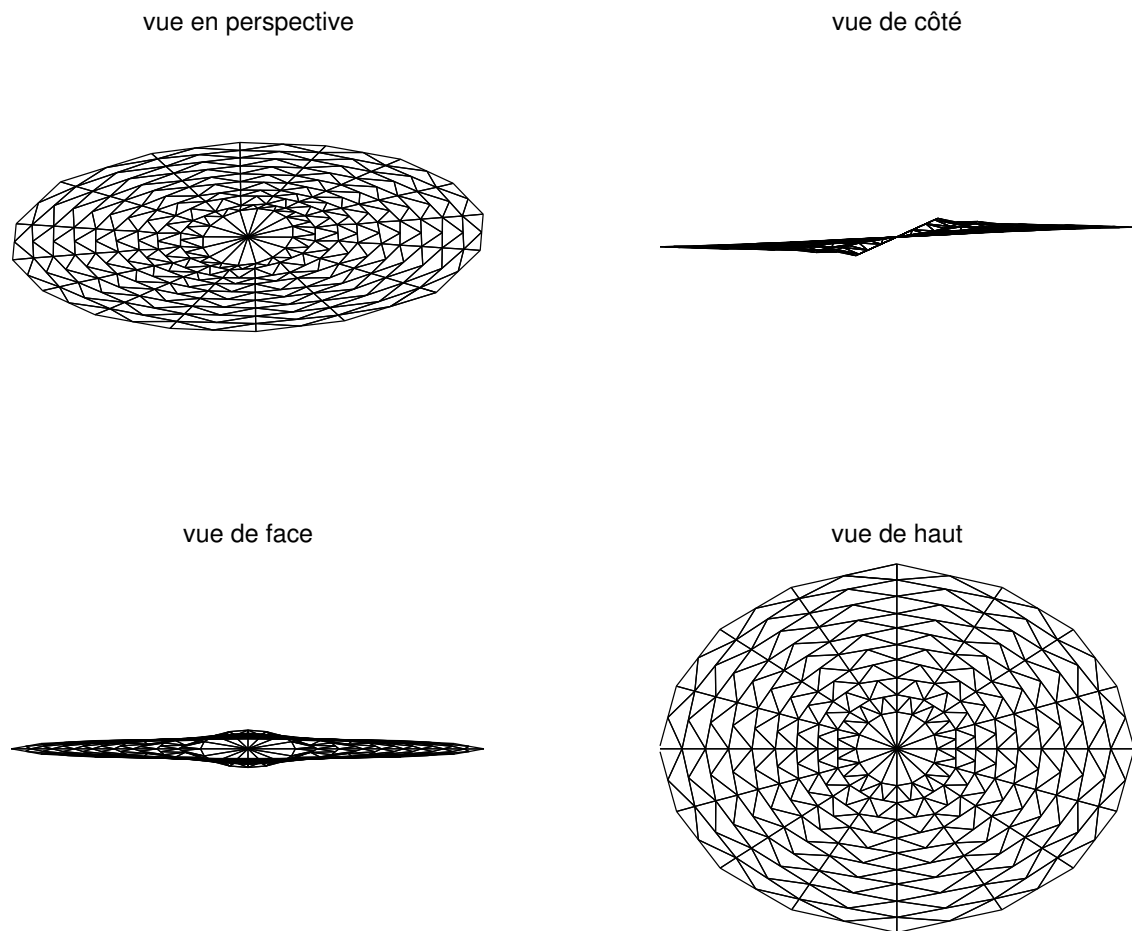


FIG. 7.16 – Fissure inclinée après propagation

fissure lors de la propagation sans calculer la durée de vie, seul l'exposant de Paris joue un rôle. Le pas maximum pour la propagation vaut 0,1 et nous laissons la fissure se propager jusqu'à atteindre un bord, sans nous arrêter si la ténacité est dépassée. Les 16 triplets de nœuds enrichis se déplacent au cours de la propagation et des nœuds normaux sont ajoutés chaque côté de chaque nouveau triangle formé. Le rayon des supports des nœuds ajoutés sur la fissure est le même que celui des nœuds de la distribution régulière de base. Par contre, le support des nœuds enrichis augmente au cours de la propagation car il est maintenu à 1,4 fois la distance entre deux sommets voisins du front (qui augmente) pour garantir un recouvrement des nœuds enrichis. La fissure au cours de la propagation est représentée sur la figure 7.15 et le dernier pas est représenté sous différentes vues sur la figure 7.16. Ces résultats sont en accord avec ceux obtenus par une méthode sans maillage (Krysl et Belytschko, 1999) et par une méthode des éléments finis étendue (Gravouil, Moës et Belytschko, 2002). Nous observons que le front de fissure a tendance à rester à peu près circulaire en se plaçant dans un plan normal à la direction de la traction, de manière semblable à la fissure à deux dimensions à la section 5.4. De cette façon, le mode I varie peu le long du front et est nettement dominant sur les deux autres modes.

## 7.6 Propagation de deux fissures

Comme à deux dimensions, notre dernier exemple est celui d'une pièce multiplement fissurée. Nous utilisons toujours la même pièce cubique en traction et considérons deux fissures circulaires de rayon  $a = 0,1$ , parallèles entre elles et de normale selon l'axe de la traction, qui ne sont ni coplanaires ni alignées. Les fissures sont représentées sur la figure 7.17. L'écart  $\Delta z$  entre les centres des fissures circulaires dans la direction de la traction vaut 0,2 et l'écart  $\Delta x$  dans une direction perpendiculaire vaut 0,4.

Nous utilisons toujours la même distribution régulière de  $21 \times 21 \times 21$  nœuds normaux, avec un nœud ajouté de chaque côté de chaque triangle représentant chaque fissure et les triplets de nœuds enrichis sur chacun des seize sommets du front délimitant chaque fissure. Ces nœuds se déplacent au cours de la propagation et des nœuds normaux sont ajoutés aux centres des triangles formés pour représenter la nouvelle position de la fissure. Le rayon des nœuds est le même que pour l'exemple précédent.

Les positions successives de la fissure au cours de la propagation sont représentées sur la figure 7.18. La dernière position est agrandie sur la figure 7.19 et présentée sous différentes vues. À la fin de la simulation, 512 triangles sont nécessaires pour représenter la paire de fissures. Les surfaces obtenues sont en accord avec celles obtenues par la méthode des éléments de frontière par Partheymüller, Haas et Kuhn (2000) avec des dimensions différentes. Le déroulement de la propagation est semblable à celui décrit à deux dimensions. Au début, la fissure croît légèrement plus vite dans la partie du front vers l'intérieur, proche de la fissure voisine. Ensuite, lorsqu'il y a recouvrement, les fissures croissent en gauchissant l'une vers l'autre. Quand le recouvrement est important, les facteurs d'intensité de contrainte diminuent dans les parties du front où il y a recouvrement et, comme nous le voyons sur la vue du haut, les incréments ajoutés sur cette partie deviennent plus courts alors que les fissures continuent à croître au même taux sur le reste du front. La figure la plus parlante est la vue de côté qui est semblable à la figure 5.17.

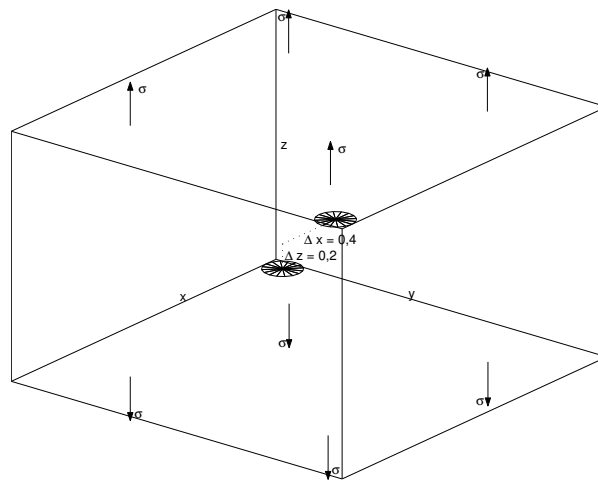


FIG. 7.17 – Paire de fissures dans un cube en traction

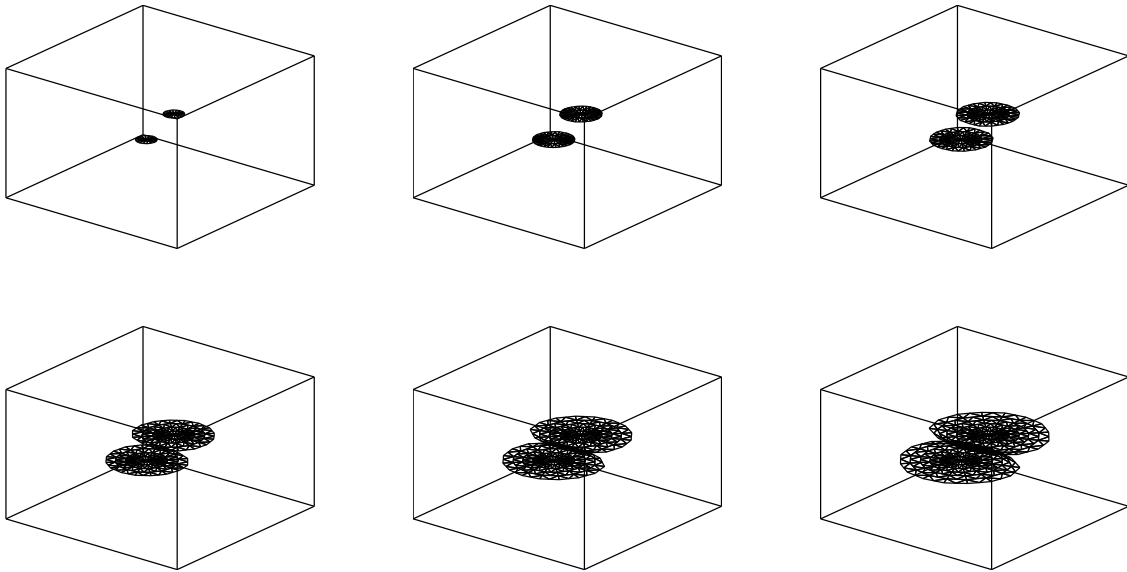
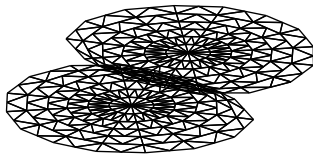


FIG. 7.18 – Six pas de la propagation de la paire de fissures

vue en perspective

vue de côté



vue de face

vue de haut

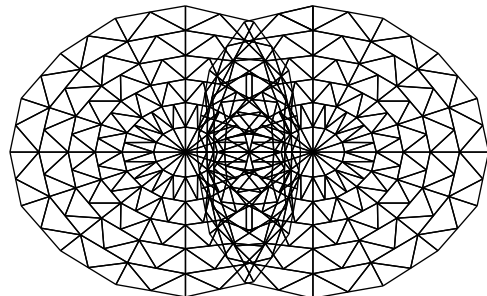


FIG. 7.19 – Paire de fissures après propagation

## 7.7 Conclusions

Comme à deux dimensions, la technique d'enrichissement de l'espace des fonctions de forme par l'intermédiaire des fonctions poids se montre simple et efficace pour obtenir une approximation du déplacement de qualité autour des fissures tridimensionnelles. La comparaison des facteurs d'intensité de contrainte obtenus par la méthode classique d'une part et par la méthode enrichie d'autre part avec des facteurs de référence quand ceux-ci sont disponibles ou la comparaison entre elles des énergies de déformation obtenues avec les deux méthodes en l'absence de référence prouvent la supériorité de la méthode enrichie. Il serait certainement intéressant de poursuivre cette thèse en comparant les facteurs d'intensité de contrainte sur un plus grand nombre d'exemples où une référence exacte est connue. Par exemple, une piste serait d'utiliser une distribution irrégulière de nœuds qui seraient plus espacées à grande distance de la fissure et de refaire les calculs des fissures circulaires sur un domaine plus grand où nous pourrions considérer que la taille de la fissure est négligeable.

Grâce à l'enrichissement, nous pouvons nous satisfaire d'une distribution de nœuds de base peu raffinée lors de la simulation de propagation de fissures à trois dimensions. Les fissures se propagent entre ces nœuds de base avec les nœuds enrichis qui suivent la propagation. Deux exemples illustrent que la méthode permet de suivre des propagations à des vitesses qui sont variables le long du front dans des directions différentes de sorte que les fissures gauchissent.

L'objectif de simuler des propagations quelconques de fissures à trois dimensions est rempli. L'exemple le plus relevé est celui de la simulation de la croissance jusqu'au recouvrement de deux fissures sur le dernier cas. Cette simulation se fait aisément avec la méthode sans maillage, alors que ce type de problème ne peut être résolu par la méthode des éléments finis classique sans une importante intervention humaine de remaillage entre chaque pas.

La méthode développée à trois dimensions laisse tout de même la place à plusieurs améliorations possibles. En premier lieu, le calcul des facteurs d'intensité de contrainte fonctionne mais la théorie développée à la section 6.5 est une simple extension de la théorie à deux dimensions qui ne tient pas compte de la courbure ni du gauchissement. Deux pistes d'amélioration sont l'application de la théorie rigoureuse de Gosz et Moran (2002) et l'utilisation de la méthode développée dans le cadre de la méthode XFEM par Moës, Gravouil et Belytschko (2002) avec un poids  $q$  particulier dans (6.19). En deuxième lieu, la méthode de calcul à trois dimensions devrait être davantage optimisée. À deux dimensions, les exemples de propagation que nous avons menés prennent typiquement un temps de calcul inférieur à la minute. Celui-ci étant nettement inférieur au temps de préparation des données, il n'est pas nécessaire d'être regardant sur l'utilisation la plus rationnelle des degrés de liberté ni sur le nombre de points d'intégration. Nous avons gardé la même philosophie à trois dimensions mais ici, les temps de calcul sont largement plus élevés. Le dernier cas par exemple demande cinq heures de calcul sur une station de travail moderne. Les améliorations à apporter devraient se diriger vers l'utilisation d'une distribution nodale irrégulière, une diminution du nombre de points de Gauss dans les cellules qui ne sont pas coupées par la fissure ou bien encore un algorithme plus efficace pour le critère de diffraction (celui-ci prenant une part de plus en plus importante du

temps de calcul total au cours de la propagation à mesure que le nombre de triangles augmente).

# Chapitre 8

## Analyse duale par une méthode sans maillage

À côté de nos travaux sur l'application des méthodes sans maillage en mécanique de la rupture, nous avons fourni une contribution entièrement originale en développant l'analyse duale basée sur une méthode sans maillage. Cette recherche a fait l'objet d'un article dans *Communications in Numerical Methods in Engineering* (Duflot et Nguyen-Dang, 2002a) et d'une *keynote lecture* au *World Congress in Computational Mechanics VI* en Chine (Duflot et Nguyen-Dang, 2004b).

L'analyse duale pour la résolution de problèmes en mécanique des solides consiste à utiliser deux modèles conjugués. Le premier est un modèle de déplacement, où la compatibilité est satisfaite et l'équilibre est violé, et le second est un modèle de contrainte, où l'équilibre est satisfait et la compatibilité est violée. L'objectif de l'analyse duale est d'obtenir une borne supérieure et une borne inférieure sur des valeurs caractéristiques comme l'énergie de déformation ou un facteur de charge. Une estimation de l'erreur sur la solution approchée est obtenue en comparant les bornes fournies par les deux modèles. Cette estimation est importante pour déterminer la fiabilité d'un résultat. L'analyse duale a été introduite par Fraeijs de Veubeke (1963, 1965) dans le cadre de la méthode des éléments finis. Dans ce chapitre, nous nous basons sur la formulation plus moderne et plus générale de Debongnie, Zhong et Beckers (1995).

Le but de ce chapitre est donc de réaliser une analyse duale à l'aide des résultats fournis par deux méthodes sans maillage. La méthode sans maillage de déplacement est celle que nous avons développée au chapitre 3, qui est largement utilisée depuis plus d'une décennie. La méthode sans maillage d'équilibre va être décrite ci-dessous et est notre création. Toute la difficulté dans cette nouvelle approche est de satisfaire l'équilibre en tout point du domaine. Pour y parvenir, les contraintes sont exprimées au moyen d'une fonction de contrainte d'Airy, qui est approximée à l'aide de fonctions de forme MLS. Quelques articles traitant d'une méthode éléments finis d'équilibre où la fonction d'Airy est approximée directement par les fonctions de forme éléments finis nous ont inspirés et méritent d'être cités : Fraeijs de Veubeke et Zienkiewicz (1967), Gallagher et Dhalla (1971), Beckers (1976), Vallabhan et Azene (1982) et Sarigul et Gallagher (1989).

Les autres travaux au sujet de l'estimation de l'erreur d'une solution obtenue par une méthode sans maillage visent à établir une estimation locale de l'erreur qui

ne se base que sur une approche de déplacement. Duarte et Oden (1996a) formulent un indicateur d'erreur à posteriori et l'utilisent dans une méthode adaptative qui renforce soit la distribution nodale soit l'ordre du polynôme de base. Chung et Belytschko (1998) proposent un indicateur basé sur la différence du champ de contrainte obtenu et d'un champ de contrainte projeté semblable à l'indicateur bien connu de Zienkiewicz et Zhu (1987) en éléments finis. Cet indicateur est utilisé dans les méthodes adaptatives de Chung, Lee et Choi (2000) pour des problèmes de fissures statiques et de Lee, Chung et Choi (2003) pour des problèmes de fissures qui se propagent. On retrouve encore cet indicateur dans les travaux de Lee et Zhou (2004a,b). D'autres indicateurs et méthodes adaptatives sont proposés par Häussler-Combe et Korn (1998), Laouar et Villon (1998) et Gavete, Falcón et Ruiz (2001); Gavete, Cuesta et Ruiz (2002); Gavete *et al.* (2003).

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section 8.1, nous présentons l'analyse duale pour les bornes supérieure et inférieure sur l'énergie complémentaire totale en élasticité. Dans la section 8.2, nous développons la méthode sans maillage d'équilibre et la mettons en parallèle avec la méthode sans maillage de déplacement. Nous illustrons la méthode avec deux exemples simples dans la section 8.3. Finalement, nous discutons des avantages et inconvénients du modèle d'équilibre sur le modèle de déplacement et ouvrons certaines perspectives dans les conclusions de la section 8.4.

## 8.1 Analyse duale

L'analyse duale que nous utilisons repose sur les définitions des énergies suivantes. L'énergie totale  $E_T$  d'une champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est définie comme

$$E_T(\mathbf{u}) = E_U(\mathbf{u}) + E_P(\mathbf{u}) \quad (8.1)$$

où

$$E_U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla_s \mathbf{u}^T : \mathbf{D} : \nabla_s \mathbf{u}^T \, d\Omega \quad (8.2)$$

est l'énergie de déformation et

$$E_P(\mathbf{u}) = - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{b}}^T \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{t}}^T \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma \quad (8.3)$$

est l'énergie potentielle des forces appliquées en volume et en surface. L'énergie complémentaire totale  $E_C$  d'un champ de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  est définie comme

$$E_C(\boldsymbol{\sigma}) = E_V(\boldsymbol{\sigma}) + E_Q(\boldsymbol{\sigma}) \quad (8.4)$$

où

$$E_V(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{D}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega \quad (8.5)$$

est l'énergie de déformation complémentaire

$$E_Q(\boldsymbol{\sigma}) = - \int_{\Gamma_u} \bar{\mathbf{u}}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (8.6)$$

est l'énergie potentielle des déplacements imposés.

Nous énonçons trois propriétés de ces énergies et renvoyons vers l'article de Debongnie, Zhong et Beckers (1995) pour les démonstrations.



1. Les champs de déplacement et de contrainte de la solution exacte, qui vérifient les équations (2.7) à (2.11), possèdent la propriété suivante :

$$- E_T(\mathbf{u}_{\text{exact}}) = E_C(\boldsymbol{\sigma}_{\text{exact}}) \quad (8.7)$$

Nous notons dès lors  $E_{\text{exact}}$  cette valeur de l'énergie complémentaire de la solution exacte  $E_C(\boldsymbol{\sigma}_{\text{exact}})$  par la suite.

2. Appelons champ de déplacement admissible, ou encore champ cinématiquement admissible, un champ qui satisfait les équations de compatibilité (2.7) et (2.8) et les équations constitutives (2.9). On peut montrer que parmi tous les champs de déplacement admissibles, le champ de déplacement de la solution exacte minimise l'énergie totale. En d'autres mots, pour tout  $\mathbf{u}_h$  cinématiquement admissible, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$E_T(\mathbf{u}_h) \geq E_T(\mathbf{u}_{\text{exact}}) \quad (8.8)$$

3. Appelons champ de contrainte admissible, ou encore champ statiquement admissible, un champ qui satisfait les équations d'équilibre (2.10) et (2.11) et les équations constitutives (2.9). On peut montrer que parmi tous les champs de contrainte admissibles, le champ de contrainte de la solution exacte minimise l'énergie complémentaire totale. En d'autres mots, pour tout  $\boldsymbol{\sigma}_h$  statiquement admissible, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$E_C(\boldsymbol{\sigma}_h) \geq E_C(\boldsymbol{\sigma}_{\text{exact}}) \quad (8.9)$$

En combinant les trois propriétés énoncées, nous aboutissons à un résultat fondamental qui donne les bornes inférieures et supérieures sur l'énergie totale complémentaire :

$$- E_T(\mathbf{u}_h) \leq E_{\text{exact}} \leq E_C(\boldsymbol{\sigma}_h) \quad (8.10)$$

Ainsi, si on possède deux approximations de la solution, l'une cinématiquement admissible et l'autre statiquement admissible, la somme de l'énergie totale de la première et de l'énergie complémentaire totale de la seconde donne une borne supérieure sur l'erreur globale de chacune des approximations.

## 8.2 Méthodes sans maillage de déplacement et d'équilibre

### 8.2.1 Méthode sans maillage de déplacement

La méthode sans maillage de déplacement a été développée longuement au chapitre 3. La formulation était basée sur un principe variationnel où nous choisissons d'approximer chacun des champs  $\mathbf{u}$  et  $\delta\mathbf{u}$  par une combinaison linéaire de fonctions appartenant au même ensemble dans les deux cas pour aboutir ainsi à une méthode de Galerkin. En utilisant une formulation énergétique dans ce chapitre, nous parvenons naturellement à une méthode de Galerkin.

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  est approché au sens de l'approximation MLS par  $\mathbf{u}_h(\mathbf{x})$  :

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (8.11)$$

où les  $\phi_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions de forme MLS (3.24). Cette approximation est introduite dans (8.1), (8.2) et (8.3). Nous obtenons (en utilisant la notation tableau)

$$E_T(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{q}^T \mathbf{g} \quad (8.12)$$

où les degrés de liberté  $\mathbf{u}_i$  de l'approximation  $\mathbf{u}_h$  sont rangés dans  $\mathbf{q}$  avec  $\mathbf{K}$ , la matrice de raideur, constituée des sous-matrices  $n_{\text{dim}} \times n_{\text{dim}}$  suivantes (en notation tableau)

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T [\mathbf{D}] \mathbf{B}_j \, d\Omega \quad (8.13)$$

et  $\mathbf{g}$ , le vecteur de charge, constitué des sous-vecteurs de dimension  $n_{\text{dim}}$  suivants

$$\mathbf{g}_i = \int_{\Omega} \phi_i \bar{\mathbf{b}} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \phi_i \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (8.14)$$

et, en état plan

$$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \phi_{i,x} & 0 \\ 0 & \phi_{i,y} \\ \phi_{i,y} & \phi_{i,x} \end{pmatrix} \quad (8.15)$$

Les degrés de liberté  $\mathbf{u}_i$  sont déterminés en exprimant que cette énergie totale de la solution approchée (8.12) doit être minimale, pour s'approcher le plus possible de la borne inférieure que constitue l'énergie totale de la solution exacte. En annulant les dérivées de cette expression par rapport à chaque  $\mathbf{u}_i$ , nous obtenons le système linéaire à résoudre suivant

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{g} \quad (8.16)$$

Pour que le champ de déplacement soit cinématiquement admissible, il doit vérifier les équations de compatibilité en surface. Ce sont les conditions aux limites essentielles d'une approche déplacement. Comme nous l'avons vu au chapitre 3, l'imposition de celles-ci n'est pas aussi immédiate qu'avec la méthode des éléments finis. Dans ce chapitre, nous les imposons à l'aide de quelques multiplicateurs lagrangiens. En plusieurs points de  $\Gamma_u$ , un degré de liberté est ajouté au système linéaire pour relâcher la contrainte

$$\sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (8.17)$$

En pratique les points concernés sont placés aux nœuds de l'approximation MLS qui se trouvent sur  $\Gamma_u$ . Il faut reconnaître que entre ces points, la solution obtenue peut osciller autour du déplacement  $\bar{\mathbf{u}}$  et que les hypothèses de la théorie de l'analyse duale ne sont pas rigoureusement satisfaites. Il s'agit certainement d'un désavantage de la méthode sans maillage sur la méthode des éléments finis dans le cadre de l'analyse duale mais il ne semble pas nuire à la régularité des courbes de convergence de l'énergie que nous observerons dans la section 8.3.

Comme pour la méthode des éléments finis, une condition de convergence de l'erreur vers zéro quand l'approximation est raffinée est que l'approximation soit capable de représenter un champ de contrainte constant (voir par exemple Strang et Fix (1973)). Nous utilisons pour construire l'approximation la base minimale qui garantisse que cette condition soit remplie : la base linéaire ( $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T$  à 2 dimensions). Elle permet en effet de représenter exactement un déplacement linéaire par la propriété de consistance (page 33) et donc une contrainte constante, qui est une combinaison de la dérivée première du déplacement.

Dans les exemples numériques, nous utilisons des ensembles de nœuds uniformément répartis. La fonction poids associée à chaque nœud est à nouveau une spline d'ordre 4 sur un domaine circulaire. Un rayon  $1,4h$  est suffisant pour que tous les points du domaine soient couverts par au moins 3 supports ( $h$  est l'espacement nodal).

### 8.2.2 Méthode sans maillage d'équilibre

Nous nous limitons aux problèmes tels que les forces extérieures volumiques dérivent d'un potentiel :

$$\bar{\mathbf{b}} = -\nabla \bar{V} \quad (8.18)$$

Le défi dans un modèle d'équilibre est de vérifier l'équilibre interne en tout point. Dans ce but, nous choisissons de rechercher une solution de la forme :

$$\boldsymbol{\sigma} = (\Delta \psi + \bar{V}) \mathbf{I} - \nabla \nabla^T \psi \quad (8.19)$$

où  $\Delta$  est le laplacien  $\nabla^T \cdot \nabla$  et  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité.  $\psi$  est appelé *fonction de contrainte d'Airy*. En état plan, cette expression devient

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_{,yy} + \bar{V} \\ \psi_{,xx} + \bar{V} \\ -\psi_{,xy} \end{bmatrix} \quad (8.20)$$

Vérifions par exemple que l'équilibre intérieur selon  $x$  est satisfait :

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \bar{b}_x = (\psi_{,yy} + \bar{V})_{,x} + (-\psi_{,xy})_{,y} - \bar{V}_{,x} = 0 \quad (8.21)$$

La fonction de contrainte d'Airy  $\psi(\mathbf{x})$  est approché au sens de l'approximation MLS par  $\psi_h(\mathbf{x})$  :

$$\psi_h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\mathbf{x}) \psi_i \quad (8.22)$$

où les  $\phi_i(\mathbf{x})$  sont à nouveau les fonctions de forme MLS (3.24). Le tenseur contrainte approché vaut donc

$$\boldsymbol{\sigma}_h = \sum_{i=1}^N (\Delta \phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{I} - \nabla \nabla^T \phi_i(\mathbf{x})) \psi_i + \bar{V} \mathbf{I} \quad (8.23)$$

Cette approximation est introduite dans (8.4), (8.5) et (8.6). Nous obtenons

$$E_C(\boldsymbol{\sigma}_h) = \frac{1}{2} \mathbf{a}^T \mathbf{F} \mathbf{a} - \mathbf{a}^T \mathbf{d} - v \quad (8.24)$$

où les degrés de liberté  $\psi_i$  de l'approximation  $\boldsymbol{\sigma}_h$  sont rangés dans le vecteur  $\mathbf{a}$  avec  $\mathbf{F}$ , la matrice de flexibilité, constituée des éléments suivants (en notation tableau)

$$F_{ij} = \int_{\Omega} \mathbf{C}_i^T [\mathbf{D}^{-1}] \mathbf{C}_j \, d\Omega \quad (8.25)$$

$\mathbf{d}$ , une sorte de vecteur de charge qui reprend l'effet des forces volumiques et des déplacements imposés sur la frontière, constitué des éléments suivants

$$d_i = \int_{\Gamma_u} \mathbf{C}_i^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{V}} \boldsymbol{\delta}^T [\mathbf{D}^{-1}] \mathbf{C}_i \, d\Omega \quad (8.26)$$

et

$$v = \int_{\Gamma_u} \bar{\mathbf{V}} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{V}}^2 \boldsymbol{\delta}^T [\mathbf{D}^{-1}] \boldsymbol{\delta} \, d\Omega \quad (8.27)$$

où

$$\mathbf{C}_i = \begin{pmatrix} \phi_{i,yy} \\ \phi_{i,xx} \\ -\phi_{i,xy} \end{pmatrix} \quad (8.28)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{pmatrix} \quad (8.29)$$

$$\boldsymbol{\delta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.30)$$

Les degrés de liberté  $\psi_i$  sont déterminés en exprimant que cette énergie complémentaire totale de la solution approchée doit être minimale, pour s'approcher le plus possible de la borne inférieure que constitue l'énergie complémentaire totale de la solution exacte. En annulant les dérivées de cette expression par rapport à chaque  $\psi_i$ , nous obtenons le système linéaire à résoudre suivant

$$\mathbf{F}\mathbf{a} = \mathbf{d} \quad (8.31)$$

Notons que la taille de la matrice de flexibilité est  $N \times N$  alors que la taille de la matrice de raideur est  $2N \times 2N$  (à 2 dimensions).

La présence des dérivées secondes des fonctions de forme MLS dans (8.28) qui est utilisée dans les intégrales (8.25) et (8.26) demande un calcul plus long en chaque point d'intégration que dans un modèle déplacement où seules les fonctions de forme et leurs dérivées premières sont nécessaires. Ce calcul et l'algorithme utilisé sont expliqués à la section 3.1.6.

Pour que le champ de contrainte soit statiquement admissible, il doit vérifier les équations d'équilibre en surface. Ce sont les conditions aux limites essentielles d'une approche équilibre. Comme dans l'approche déplacement, nous allons les imposer en quelques points de la frontière seulement à l'aide de multiplicateurs lagrangiens. Remarquons que dans ce cas-ci, même si les fonctions de forme MLS avaient vérifié la propriété des fonctions de forme éléments finis  $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ , nous n'aurions pas pu imposer les conditions essentielles directement car ces conditions portent sur les

dérivées secondes des fonctions de forme et non sur les fonctions de forme elles-mêmes comme dans l'approche déplacement. En plusieurs points de  $\Gamma_t$ , un degré de liberté est ajouté au système linéaire pour relacher la contrainte

$$\left[ \left( \sum_{i=1}^N \Delta \phi_i(\mathbf{x}) \psi_i + \bar{V} \right) \mathbf{I} - \sum_{i=1}^N \nabla \nabla^T \phi_i(\mathbf{x}) \psi_i \right] \cdot \mathbf{n} - \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad (8.32)$$

En pratique, les points concernés sont placés aux nœuds de l'approximation MLS qui se trouvent sur  $\Gamma_t$ . Ici aussi, les hypothèses de la théorie de l'analyse duale ne sont pas rigoureusement satisfaites car les tractions sont différentes de  $\bar{\mathbf{t}}$  entre les points où (8.32) est imposé mais en pratique, cela ne nous semble pas faire perdre les résultats de cette théorie.

Pour parvenir à représenter un champ de contrainte constant et assurer la convergence de la méthode (voir par exemple à nouveau Strang et Fix (1973)), il est nécessaire d'utiliser une base quadratique pour l'approximation MLS (à 2 dimensions  $\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ y^2 \ xy]^T$ ). Elle permet en effet de représenter exactement une fonction d'Airy quadratique par la propriété de consistance (page 33) et donc une contrainte constante qui est donnée par la dérivée seconde de la fonction d'Airy. L'obligation d'utiliser une base quadratique dans cette approche est semblable à celle rencontrée par Krysl et Belytschko (1996a,b) dans leur application d'une méthode sans maillage à la résolution de problèmes de plaques et de coques minces. Ces problèmes possèdent des équations elliptiques du quatrième ordre qui font aussi intervenir les dérivées secondes des fonctions de forme dans la construction de la matrice de rigidité.

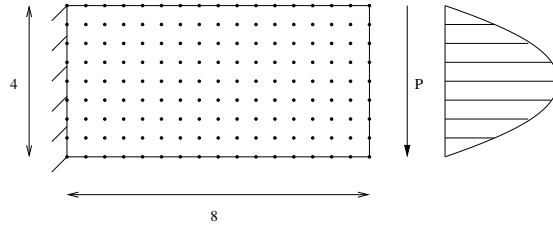
Comme dans le modèle déplacement, une spline d'ordre 4 (3.39) sur un domaine circulaire est utilisée comme fonction poids. Ce choix de fonction poids est un point important car il assure la continuité des contraintes sans qu'il ne soit nécessaire de prendre des précautions particulières pour assurer l'équilibre des tractions entre deux éléments comme c'est le cas pour une méthode d'équilibre avec des éléments finis. En effet, la spline d'ordre 4 est  $C^2(\Omega)$  et donc, par la propriété de continuité de la page 33 et vu que notre base quadratique est  $C^\infty(\Omega)$ , les fonctions de forme sont  $C^2(\Omega)$  et les contraintes  $C^0(\Omega)$  par (8.23).

Le rayon des supports doit être choisi plus important que dans le modèle déplacement. La base quadratique que nous devons utiliser est de taille 6 alors que la base linéaire n'a qu'une taille 3. Chaque point du domaine doit donc être couvert par 6 supports pour que l'approximation MLS soit correctement définie. Dans les exemples numériques qui suivent, nous utilisons un rayon de  $2,8h$ .

## 8.3 Exemples numériques

### 8.3.1 Poutre encastree

Le premier exemple est celui d'une poutre encastree à une extrémité et soumise à une force de cisaillement variant de manière parabolique sur la hauteur à l'autre extrémité (figure 8.1). Les valeurs numériques sont  $E = 3.10^7$ ,  $\nu = 0,3$  et la force totale  $P = 250$ . Il n'y a pas de force volumique et nous supposons un état plan de contrainte.

FIG. 8.1 – Poutre encastée soumise à un cisaillement ( $17 \times 9$  nœuds)

Nombre de nœuds	Espacement nodal	$-E_T$	$E_C$
$17 \times 9 = 153$	0,5	0,0391579	0,0405188
$33 \times 17 = 561$	0,25	0,0393393	0,0396398
$49 \times 25 = 1225$	0,1667	0,0393768	0,0395232
$65 \times 33 = 2145$	0,125	0,0393911	0,0394816

TAB. 8.1 – Résultats pour le problème de la poutre

Nous résolvons le problème par une méthode déplacement d'une part et par une méthode équilibre d'autre part en utilisant quatre distributions de nœuds. Les nœuds sont toujours répartis uniformément. La distribution la plus grossière est montrée sur la figure 8.1. Les 3 autres distributions sont respectivement deux, trois et quatre fois plus fines. Les énergies calculées sont données dans le tableau 8.1 et représentées en fonction de l'inverse de l'espacement nodal sur la figure 8.2. Comme prévu par la théorie, les valeurs  $-E_T(\mathbf{u}_h)$  et  $E_C(\boldsymbol{\sigma}_h)$  convergent l'une vers l'autre;  $-E_T(\mathbf{u}_h)$  converge avec des valeurs croissantes et  $E_C(\boldsymbol{\sigma}_h)$  converge avec des valeurs décroissantes. De plus, ces résultats sont en accord avec le résultat 0,0393955 de la thèse de Zhong (1991) obtenu par une extrapolation de Richardson de résultats obtenus par la méthode des éléments finis. Cette valeur est tracée comme une horizontale sur la figure 8.2. La différence des énergies pour la distribution la plus fine est de 0,2% — c'est aussi une borne supérieure sur l'erreur de notre résultat le plus précis.

### 8.3.2 Plaque fissurée

Le deuxième problème est celui d'une plaque présentant une fissure débouchante en traction. Il n'y a pas de force volumique et nous supposons un état plan de contrainte. Nous utilisons la symétrie et ne résolvons le problème que sur une demi-plaque. Le domaine est un carré sur trois côtés duquel le déplacement de la solution du mode I pur en front de fissure en état plan de contrainte (2.40) est imposé. Sur le quatrième côté, qui est l'axe de symétrie et qui contient la fissure, une traction nulle est imposée à l'emplacement de la fissure et un déplacement vertical nul sans traction horizontale est imposé en dehors de la fissure (figure 8.3). Avec de telles conditions aux limites, la solution exacte de ce problème est connue : c'est la solution du mode I pur en front de fissure dans l'entièreté de la plaque. Nous choisissons les valeurs numériques suivantes :  $E = 1$ ,  $\nu = 0,3$  et  $K_I = 1$ . En introduisant le champ de contrainte exact (2.34) avec ces valeurs numériques dans (8.4), (8.5) et (8.6) et en intégrant, nous trouvons l'énergie complémentaire totale de la solution exacte

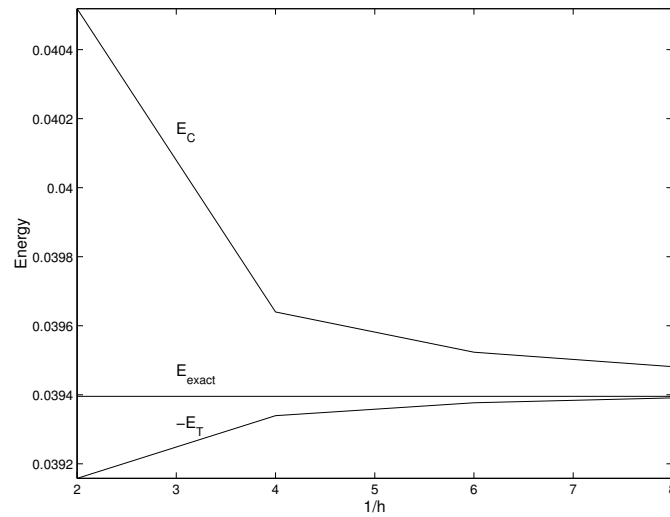
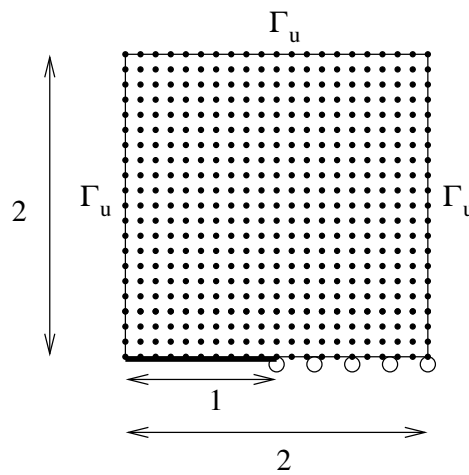


FIG. 8.2 – Courbes de convergence pour le problème de la poutre

FIG. 8.3 – Demi-plaque fissurée ( $21 \times 21$  nœuds)

Nombre de nœuds	Espacement nodal	$-E_T$	$E_C$
$21 \times 21 = 441$	0,1	-0,426003	-0,394501
$41 \times 41 = 1681$	0,05	-0,421725	-0,405843
$61 \times 61 = 3721$	0,03333	-0,420288	-0,409678
$81 \times 81 = 6561$	0,025	-0,419569	-0,411418

TAB. 8.2 – Résultats pour le problème de la fissure

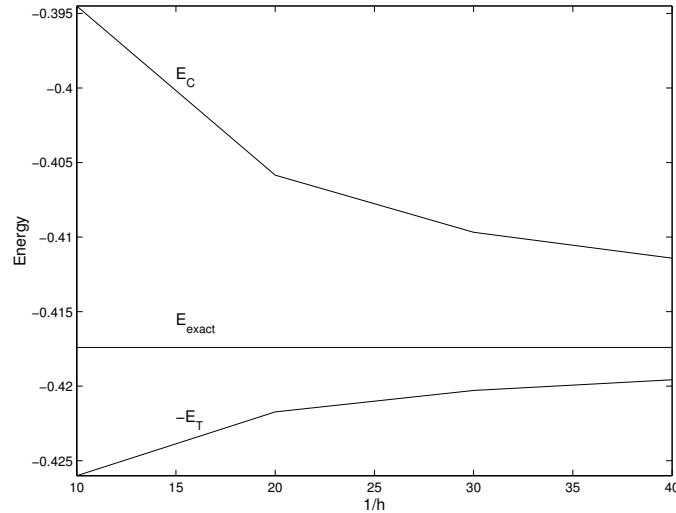


FIG. 8.4 – Courbes de convergence pour le problème de la fissure

-0,417400.

Comme dans l'exemple précédent, nous résolvons le problème par une méthode déplacement d'une part et par une méthode équilibre d'autre part en utilisant quatre distributions de nœuds répartis uniformément. La distribution la plus grossière est montrée sur la figure 8.3. Les 3 autres distributions sont respectivement deux, trois et quatre fois plus fines. Les énergies calculées sont données dans le tableau 8.2 et représentées en fonction de l'inverse de l'espacement nodal sur la figure 8.4 avec une horizontale pour la valeur exacte. Les mêmes conclusions peuvent être tirées que pour l'exemple précédent à propos de l'accord des résultats avec la théorie. Dans ce cas-ci, la différence des énergies pour la distribution la plus fine est de 2%.

## 8.4 Conclusions

La méthode sans maillage d'équilibre que nous avons développée dans ce chapitre nous a permis de remplir l'objectif que nous nous étions fixé d'obtenir un indicateur de la qualité d'une solution quand on l'utilise en conjugaison avec une méthode de déplacement. Toutefois, elle présente quelques désavantages qui font qu'elle ne remplace pas une méthode de déplacement. Premièrement, pour un nombre de nœuds donnés, les deux exemples montrent qu'une énergie plus proche de la valeur exacte est obtenue pour une méthode de déplacement. Ensuite, dans les problèmes rencontrés en pratique en mécanique des solides comme l'exemple de la poutre, la frontière



$\Gamma_t$  est plus longue que la frontière  $\Gamma_u$  et il y a plus d'inconnues supplémentaires au système linéaire pour imposer les conditions essentielles que pour une méthode de déplacement. Enfin, elle est plus coûteuse pour plusieurs raisons :

- une base quadratique est nécessaire donc
  - il faut inverser une matrice  $6 \times 6$  à chaque point d'intégration pour calculer les fonctions de forme par (3.25) plutôt qu'une matrice  $3 \times 3$  pour une base linéaire,
  - il faut utiliser de plus grands supports pour les fonctions poids que pour une base linéaire et il y a donc davantage de fonctions de forme non-nulles en chaque point d'intégration et par conséquent une matrice de flexibilité plus dense ;
- les dérivées secondes des fonctions de forme sont nécessaires.

La méthode d'équilibre présente certes l'avantage de ne demander qu'un seul degré de liberté par nœud mais cela ne suffit pas à contre-balancer les désavantages.

La méthode a été décrite en élasticité linéaire à deux dimensions mais elle peut être étendue. D'abord, elle peut être appliquée en élasticité non-linéaire car on peut montrer que les résultats de la section 8.1 restent valables à condition de définir  $E_U$  comme l'intégrale de la densité d'énergie de déformation  $W(\boldsymbol{\varepsilon})$  qui est telle que  $\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$  et  $E_V$  comme l'intégrale de la densité d'énergie de contrainte conjuguée à  $W$  à condition que  $\frac{\partial^2 W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2}$  soit défini positif.

Ensuite, elle peut être appliquée à 3 dimensions. Dans les conclusions de Duflot et Nguyen-Dang (2002a), nous écrivions erronément qu'exprimer le tenseur tridimensionnel de contrainte à l'aide d'une seule fonction d'Airy par (8.19) convenait. Or, s'il est vrai qu'un tenseur de contrainte qui dérive d'une telle fonction d'Airy satisfait l'équilibre, il est faux que tous les tenseurs de contrainte admissibles peuvent s'exprimer de la sorte. En effet, si une seule fonction de contrainte permet à deux dimensions de déduire les trois composantes du tenseur de contrainte bidimensionnel liées par les deux relations d'équilibre ( $3 - 2 = 1$ ), il faut trois fonctions de contrainte pour déduire les six composantes du tenseur de contrainte tridimensionnel liées par les trois relations d'équilibre ( $6 - 3 = 3$ ). Il est possible de rechercher une solution exprimée à l'aide des fonctions de contrainte dites de Maxwell

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{zz}^2 \\ \partial_{yy}^2 \\ 0 \\ 0 \\ -\partial_{yz}^2 \end{pmatrix} \psi_x + \begin{pmatrix} \partial_{zz}^2 \\ 0 \\ \partial_{xx}^2 \\ 0 \\ -\partial_{xz}^2 \\ 0 \end{pmatrix} \psi_y + \begin{pmatrix} \partial_{yy}^2 \\ \partial_{xx}^2 \\ 0 \\ -\partial_{xy}^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \psi_z + \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{V} \\ \bar{V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

soit celles dites de Moreira

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{yz}^2 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\partial_{xz}^2 \\ -\frac{1}{2}\partial_{xy}^2 \\ \frac{1}{2}\partial_{xx}^2 \end{pmatrix} \psi_x + \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_{xz}^2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2}\partial_{yz}^2 \\ \frac{1}{2}\partial_{yy}^2 \\ -\frac{1}{2}\partial_{xy}^2 \end{pmatrix} \psi_y + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial_{xy}^2 \\ \frac{1}{2}\partial_{zz}^2 \\ -\frac{1}{2}\partial_{yz}^2 \\ -\frac{1}{2}\partial_{xz}^2 \end{pmatrix} \psi_z + \begin{pmatrix} \bar{V} \\ \bar{V} \\ \bar{V} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.34)$$

où nous utilisons la forme tableau du tenseur contrainte (voir par exemple Moitinho de Almeida et Almeida Pereira (1996) pour une utilisation de ces fonctions de contrainte avec la méthode des éléments finis). Il reste alors à approximer le vecteur  $\boldsymbol{\psi}$  au sens MLS et à introduire le tout dans l'expression de l'énergie totale complémentaire dont la minimisation (en tenant compte des conditions essentielles) donnera les valeurs des  $3N$  degrés de liberté.

# Chapitre 9

## Conclusions et perspectives

La méthode sans maillage présente la particularité par rapport à la méthode des éléments finis de se baser sur un ensemble de nœuds répartis dans le domaine sans exiger la construction d'un maillage qui relie ces nœuds. Cette particularité est un avantage pour simuler des problèmes de propagation de fissures car il n'est pas nécessaire de reconstruire le maillage entre chaque étape de la propagation. La fissure est représentée de manière linéaire par morceaux : à deux dimensions par une ligne brisée et à trois dimensions par un ensemble de triangles juxtaposés. Dans la méthode sans maillage, la discontinuité du champ de déplacement de part et d'autres de la fissure est introduite en diminuant la fonction de forme d'un nœud en un point si ces deux-ci sont séparés par la fissure en utilisant la longueur du chemin qui les relie en contournant la fissure. Cette technique permet de garder un déplacement continu dans le reste du domaine.

La prise en compte d'une frontière intérieure mobile n'est pas la seule difficulté numérique en mécanique de la rupture. Il convient aussi de représenter avec précision les gradients infinis du champ de déplacement à l'approche du front de fissure. Pour éviter de devoir utiliser un nombre trop important de nœuds au voisinage du front, la solution est d'utiliser dans la méthode sans maillage des fonctions de forme qui reprennent le comportement asymptotique du déplacement analytique en front de fissure. La technique présentée dans cette thèse repose sur l'introduction de ce comportement dans certaines fonctions poids associées à des nouveaux nœuds placés sur le front de fissure. Elle est peu coûteuse et s'applique aussi à trois dimensions. Des exemples simples montrent l'amélioration des résultats quand cette technique est utilisée tant à deux qu'à trois dimensions. Elle peut alors être appliquée à des problèmes de propagation plus compliqués, y compris dans des corps multi-fissurés.

Outre l'enrichissement, les autres contributions originales de cette thèse sont les suivantes :

- des algorithmes détaillés pour l'implémentation efficace de la méthode sans maillage,
- l'explication d'une méthode strictement sans maillage où l'intégration se fait par une quadrature MLS,
- l'utilisation des facteurs d'intensité de contrainte obtenus par une méthode sans maillage dans un calcul de durée de vie à deux dimensions,
- la simulation de la propagation dans des corps multi-fissurés par une méthode sans maillage à deux et trois dimensions,

- l'utilisation du critère de diffraction à trois dimensions,
- la méthode sans maillage d'équilibre et son utilisation pour une estimation globale de l'erreur.

Pour poursuivre cette thèse, les pistes qui nous semblent intéressantes pour de nouvelles contributions originales sont les suivantes :

- Nous avons étudié des problèmes de fissuration par fatigue avec une loi de comportement élastique linéaire mais l'amélioration des résultats apportée par la technique d'enrichissement demeurerait pour l'étude d'autres comportements. La première piste est donc d'utiliser la méthode enrichie en propagation dynamique ou pour des comportements non-linéaires où l'enrichissement dépendra de l'exposant de la relation polynomiale entre les déformations et les contraintes.
- À trois dimensions, nous nous sommes limités à des propagations de fissures internes car les techniques pour évaluer numériquement les facteurs d'intensité de contrainte à proximité des frontières externes et les lois d'évolution des fissures à l'intersection des faces sont mal connues. Combiner la méthode enrichie avec une méthode de simulation de fissures débouchantes est une autre piste intéressante.
- D'un aspect algorithmique, une piste attirante est une meilleure exploitation de l'itération entre les pas de la simulation de la propagation. Du temps de calcul peut être économisé si la matrice de raideur n'est pas recalculée entièrement à chaque pas. Il suffirait d'intégrer sur le domaine où les fonctions de forme sont modifiées par l'extension de la fissure, c'est-à-dire sur l'union des supports qui ont une intersection avec l'incrément de fissure. Pour éviter la construction d'une division en cellules de ce domaine « perturbé » à chaque pas, il serait même possible d'intégrer avec notre technique de quadrature MLS en construisant l'approximation MLS utilisée pour l'intégration uniquement sur les nœuds qui ont une intersection avec l'incrément de fissure. Éventuellement, une piste pour gagner du temps de calcul est l'utilisation la solution du pas précédent comme estimation initiale dans la résolution du système linéaire par une méthode itérative.
- Sur le plan théorique, le plus spectaculaire serait de parvenir à fusionner l'application de la méthode sans maillage pour l'analyse duale et pour la propagation de fissures. Nous obtiendrions une simulation de la propagation avec une estimation de l'erreur à chaque pas. L'approximation d'équilibre pourrait même être introduite dans l'intégrale I, conjuguée à l'intégrale J, qui se base sur l'intégration sur un contour de l'énergie complémentaire à la recherche de bornes sur l'erreur sur les facteurs d'intensité de contrainte eux-mêmes. Nos premières recherches dans cette voie n'ont pas abouti, principalement en raison de la difficulté d'imposer les conditions essentielles d'équilibre  $\mathbf{t} = 0$  sur l'ensemble de la fissure. C'est pourtant en suivant cette dernière piste que la contribution la plus originale aux méthodes numériques en mécanique de la rupture pourrait être apportée.

# Bibliographie

- ALURU, N. R. et LI, G. (2001). Finite cloud method : A true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:2373–2410.
- ANDERSON, T. L. (1991). *Fracture Mechanics : Fundamentals and Applications*. CRC Press, Boca Raton.
- ATLURI, S. N., KIM, H.-G. et CHO, J. Y. (1999). A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin and local boundary integral equation methods. *Computational Mechanics*, 24:348–372.
- ATLURI, S. N. et ZHU, T. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127.
- ATLURI, S. N. et ZHU, T. (2000). New concepts in meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:537–556.
- BARSOUM, R. S. (1976). On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10:25–37.
- BARSOUM, R. S. (1977). Triangular quarter-point elements as elastic and perfectly-plastic crack tip elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11:85–98.
- BECKERS, P. (1976). *Les fonctions de tensions dans la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- BEISSEL, S. et BELYTSCHKO, T. (1996). Nodal integration of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:49–74.
- BELYTSCHKO, T., GU, L. et LU, Y. Y. (1994). Fracture and crack growth by element-free Galerkin methods. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2:519–534.
- BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., DOLBOW, J. et GERLACH, C. (1998). On the completeness of meshfree particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:785–819.
- BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., FLEMING, M., ORGAN, D. et LIU, W. K. (1996a). Smoothing and accelerated computations in the element-free Galerkin method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 74:111–126.

- BELYTSCHKO, T., KRONGAUZ, Y., ORGAN, D., FLEMING, M. et KRYSL, P. (1996b). Meshless methods : An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47.
- BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y. et GU, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256.
- BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y. et GU, L. (1995). Crack propagation by element-free Galerkin methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 51(2):295–315.
- BELYTSCHKO, T., LU, Y. Y., GU, L. et TABBARA, M. (1995). Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids and Structures*, 32(17–18):2547–2570.
- BELYTSCHKO, T., ORGAN, D. et GERLACH, C. (2000). Element-free Galerkin methods for dynamic fracture in concrete. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187:385–399.
- BELYTSCHKO, T., ORGAN, D. et KRONGAUZ, Y. (1996). A coupled finite element–element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 17:186–195.
- BELYTSCHKO, T. et TABBARA, M. (1996). Dynamic fracture using element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:923–938.
- BONET, J. et KULASEGARAM, S. (2000). Correction and stabilization of smooth particle hydrodynamics methods with applications in metal forming simulations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1189–1214.
- BOUCHARD, P. O., BAY, F., CHASTEL, Y. et TOVENA, I. (2000). Crack propagation modelling using an advanced remeshing technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189:723–742.
- BROEK, D. (1974). *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Noordhoff International Publishing, Leyden.
- CARPINTERI, A., FERRO, G. et VENTURA, G. (2001). An augmented Lagrangian element free (ALEF) approach for crack discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191:941–957.
- CARPINTERI, A., FERRO, G. et VENTURA, G. (2002). The partition of unity quadrature in meshless methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:987–1006.
- CARPINTERI, A., FERRO, G. et VENTURA, G. (2003). The partition of unity quadrature in element-free crack modelling. *Computers and Structures*, 81:1783–1794.
- CARTER, B. J., WAWRZYNEK, P. A. et INGRAFFEA, A. R. (2000). Automated 3-D crack growth simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:229–253.

- CHEN, Y., ESKANDARIAN, A., OSKARD, M. et LEE, J. D. (2004). Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 41:83–94.
- CHEREPANOV, G. P. (1979). *Mechanics of Brittle Fracture*. McGraw-Hill, New York.
- CHUNG, H. J. et BELYTSCHKO, T. (1998). An error estimate in the EFG method. *Computational Mechanics*, 21:91–100.
- CHUNG, H. J., LEE, G. H. et CHOI, C. K. (2000). Adaptive nodal generation with the element-free Galerkin method. *Structural Engineering and Mechanics*, 10:635–650.
- DE, S. et BATHE, K. J. (2000). The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 25:329–345.
- DE, S. et BATHE, K. J. (2001). Displacement/pressure mixed interpolation in the method of finite spheres. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:275–292.
- DEBONGNIE, J.-F., ZHONG, H. G. et BECKERS, P. (1995). Dual analysis with general boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 122:183–192.
- DHONDT, G. (1998). Automatic 3-D mode I crack propagation calculations with finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:739–757.
- DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999a). Numerical integration of the Galerkin weak form in meshfree methods. *Computational Mechanics*, 23:219–230.
- DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999b). Volumetric locking in the element-free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:925–942.
- DUARTE, C. A. et ODEN, J. T. (1996a). An hp adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237–262.
- DUARTE, C. A. et ODEN, J. T. (1996b). Hp clouds—an hp meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12:673–705.
- DUFLOT, M. et NGUYEN-DANG, H. (2000). A new truly meshless Galerkin method. In NGUYEN-DANG, H., éditeur : *Proceedings of the International Colloquium in Mechanics of Solids, Fluids, Structures and Interactions*, pages 433–442, Nha Trang (Vietnam).
- DUFLOT, M. et NGUYEN-DANG, H. (2002a). Dual analysis by a meshless method. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18:621–631.

- DUFLOT, M. et NGUYEN-DANG, H. (2002b). Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method. *In Proceedings of the Second Conference on Advanced Computational Methods in Engineering*, Liège. Les Éditions de l'Université de Liège.
- DUFLOT, M. et NGUYEN-DANG, H. (2002c). A truly meshless method based on a moving least squares quadrature. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18:441–449.
- DUFLOT, M. et NGUYEN-DANG, H. (2004a). Fatigue crack growth analysis by an enriched meshless method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 168:155–164.
- DUFLOT, M. et NGUYEN-DANG, H. (2004b). Global error estimation with displacement and equilibrium meshless method. *In Proceedings of the World Congress in Computational Mechanics VI*, Pekin. Tsinghua University Press & Springer-Verlag.
- DUFLOT, M. et NGUYEN-DANG, H. (2004c). A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:1945–1961.
- ERDOGAN, F. et SHIH, G. C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, 85:519–527.
- ESHELBY, J. D. (1956). The continuum theory of lattice defects. *In SEITZ, F. et TUMBULL, D., éditeurs : Solid State Physics*, volume 3, pages 79–144. Academic Press, New York.
- FLEMING, M. (1997). *Element-Free Galerkin Method for Fatigue and Quasi-Static Fracture*. Thèse de doctorat, Northwestern University.
- FLEMING, M., CHU, Y. A., MORAN, B. et BELYTSCHKO, T. (1997). Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:1483–1504.
- FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. (1963). Upper and lower bounds in matrix structural analysis. *In AGARDograph 72 : Matrix Methods of Structural Analysis*, pages 165–201. Pergamon Press, Londres.
- FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. (1965). Displacement and equilibrium models in the finite element method. *In ZIENKIEWICZ, O. C. et HOLISTER, G., éditeurs : Stress Analysis*, chapitre 9, pages 145–197. John Wiley and Sons. Ré-édité dans *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 52 :287–342 (2001).
- FRAEIJIS DE VEUBEKE, B. et ZIENKIEWICZ, O. C. (1967). Strain-energy bounds in finite-element analysis by slab analogy. *Journal of Strain Analysis*, 2(4):265–271.
- GALLAGHER, R. H. et DHALLA, A. K. (1971). Direct flexibility finite element elastoplastic analysis. *In Proceedings of the First International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology*, pages 443–462, Berlin.



- GAVETE, L., CUESTA, J. L. et RUIZ, A. (2002). A procedure for approximation of the error in the EFG method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:677–690.
- GAVETE, L., FALCÓN, S. et RUIZ, A. (2001). An error indicator for the element-free Galerkin method. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 20:327–341.
- GAVETE, L., GAVETE, M. L., ALONSO, B. et MARTÍN, A. J. (2003). A posteriori error approximation in EFG method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:2239–2263.
- GIVOLI, D. et ZUSMAN, R. (2002). An adaptive finite element framework for fatigue crack propagation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:111–135.
- GOSZ, M. et MORAN, B. (2002). An interaction energy integral method for computation of mixed-mode stress intensity factors along non-planar crack fronts in three dimensions. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:299–319.
- GRAVOUIL, A., MOËS, N. et BELYTSCHKO, T. (2002). Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets—part II : Level set update. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2569–2586.
- GRIFFITH, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of Londres*, 221:163–198.
- HEGEN, D. (1996). Element-free Galerkin methods in combination with finite element approaches. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 135:143–166.
- HEGEN, D. (1997). *An Element-Free Galerkin Method for Crack Propagation in Brittle Materials*. Thèse de doctorat, Technische Universiteit Eindhoven.
- HENSHELL, R. D. et SHAW, K. G. (1975). Crack tip finite elements are unnecessary. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 9:495–507.
- HÄUSSLER-COMBE, U. et KORN, C. (1998). An adaptive approach with the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162:203–222.
- IDELSOHN, S. R., OÑATE, E., CALVO, N. et DEL PIN, F. (2003). The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:893–912.
- IRWIN, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics*, 24:361–364.
- KALJEVIĆ, I. et SAIGAL, S. (1997). An improved element-free Galerkin formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:2953–2974.

- KARUTZ, H., CHUDOBA, R. et KRÄTZIG, W. B. (2002). Automatic adaptive generation of a coupled finite element/element-free Galerkin discretization. *Finite Elements in Analysis and Design*, 38:1075–1091.
- KRONGAUZ, Y. et BELYTSCHKO, T. (1996). Enforcement of essential boundary conditions in meshless approximations using finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 131:133–145.
- KRONGAUZ, Y. et BELYTSCHKO, T. (1997a). Consistent pseudo-derivatives in meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 146:371–386.
- KRONGAUZ, Y. et BELYTSCHKO, T. (1997b). A Petrov-Galerkin diffuse element method (PGDEM) and its comparison to EFG. *Computational Mechanics*, 19:327–333.
- KRONGAUZ, Y. et BELYTSCHKO, T. (1998). EFG approximation with discontinuous derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41:1215–1233.
- KRYSL, P. et BELYTSCHKO, T. (1996a). Analysis of thin plates by the element-free Galerkin method. *Computational Mechanics*, 17:186–195.
- KRYSL, P. et BELYTSCHKO, T. (1996b). Analysis of thin shells by the element-free Galerkin method. *International Journal of Solids and Structures*, 33(20–22):3057–3080.
- KRYSL, P. et BELYTSCHKO, T. (1997). Element-free Galerkin method : Convergence of the continuous and discontinuous shape functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 148:257–277.
- KRYSL, P. et BELYTSCHKO, T. (1999). The element-free Galerkin method for dynamic propagation of arbitrary 3-D cracks. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44:767–800.
- KRYSL, P. et BELYTSCHKO, T. (2000). An efficient linear-precision partition of unity basis for unstructured meshless methods. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 16:239–255.
- KWON, K.-C., PARK, S.-H., JIANG, B.-N. et YOUN, S.-K. (2003). The least-squares meshfree method for solving linear elastic problems. *Computational Mechanics*, 30:196–211.
- LANCASTER, P. et SALKAUSKAS, K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158.
- LANCASTER, P. et SALKAUSKAS, K. (1990). *Curve and Surface Fitting : An Introduction*. Academic Press, Londres.
- LAOUAR, T. et VILLON, P. (1998). Adaptive analysis for the diffuse element method. In IDELSOHN, S., OÑATE, E. et DVORKIN, E., éditeurs : *Computational Mechanics*. CIMNE, Barcelona.

- LEE, C. K. et ZHOU, C. E. (2004a). On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method—Part I : Stress recovery and a posteriori error estimation. *Computers and Structures*, 82:413–428.
- LEE, C. K. et ZHOU, C. E. (2004b). On error estimation and adaptive refinement for element free Galerkin method—Part II : Adaptive refinement. *Computers and Structures*, 82:429–443.
- LEE, G. H., CHUNG, H. J. et CHOI, C. K. (2003). Adaptive crack propagation analysis with the element-free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:331–350.
- LEE, S. H. et YOON, Y. C. (2003). An improved crack analysis technique by element-free Galerkin method with auxiliary supports. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 56:1291–1314.
- LISZKA, T. J., DUARTE, C. A. et TWORZYDLO, W. W. (1996). Hp-meshless cloud method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:263–288.
- LIU, G. R. et GU, Y. T. (2001). A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:937–951.
- LIU, W. K., JUN, S. et ZHANG, Y. F. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20:1081–1106.
- LU, Y. Y., BELYTSCHKO, T. et GU, L. (1994). A new implementation of the element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113:397–414.
- LU, Y. Y., BELYTSCHKO, T. et TABBARA, M. (1995). Element-free Galerkin method for wave propagation and dynamic fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 126:131–153.
- LUCY, L. B. (1977). A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, 82:1013–1024.
- MEGUID, S. A. (1989). *Engineering Fracture Mechanics*. Elsevier Applied Science, Londres.
- MELENK, J. M. et BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314.
- MI, Y. et ALIABADI, M. H. (1993). Three-dimensional crack growth simulation using BEM. *Computers and Structures*, 52:871–878.
- MOITINHO DE ALMEIDA, J. P. et ALMEIDA PEREIRA, J. B. (1996). A set of hybrid equilibrium finite element models for the analysis of three-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:2789–2802.

- MORAN, B. et SHIH, C. F. (1987). Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance. *Engineering Fracture Mechanics*, 27(6):615–641.
- MOËS, N., DOLBOW, J. et BELYTSCHKO, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:131–150.
- MOËS, N., GRAVOUIL, A. et BELYTSCHKO, T. (2002). Non-planar 3d crack growth by the extended finite element and level sets—part I : Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:2549–2568.
- MUKHERJEE, Y. X. et MUKHERJEE, S. (1997). The boundary node method for potential problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40:797–815.
- MURAKAMI, Y., éditeur (1987). *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press.
- NAGASHIMA, T. (1999). Node-by-node meshless approach and its applications to structural analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:341–385.
- NAYROLES, B., TOUZOT, G. et VILLON, P. (1992). Generalizing the finite element method : Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318.
- NIKISHOV, G. P. et ATLURI, S. N. (1987). Calculation of fracture mechanics parameters for an arbitrary three-dimensional crack by the 'equivalent domain integral method'. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:1801–1821.
- NUISMER, R. J. (1975). An energy release rate criterion for mixed mode fracture. *International Journal of Fracture*, 11:245–250.
- OÑATE, E., IDELSOHN, S., ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. et SACCO, C. (1996). A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 39:315–346.
- ODEN, J. T., DUARTE, C. A. et ZIENKIEWICZ, O. C. (1998). A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 153:117–126.
- ORGAN, D., FLEMING, M., TERRY, T. et BELYTSCHKO, T. (1996). Continuous meshless approximations for nonconvex bodies by diffraction and transparency. *Computational Mechanics*, 18:1–11.
- PAIGE, C. C. et SAUNDERS, M. A. (1975). Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 12:617–629.
- PARIS, P. C. et ERDOGAN, F. (1963). A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, 85:528–534.

- PARTHEYMÜLLER, P., HAAS, M. et KUHN, G. (2000). Comparison of the basic and the discontinuity formulation of the 3D-dual boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 24:777–788.
- PONTHOT, J.-P. et BELYTSCHKO, T. (1998). Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for element-free Galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 152:19–46.
- PORTELA, A., ALIABADI, M. et ROOKE, D. (1991). The dual boundary element method : Effective implementation for crack problem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33:1269–1287.
- RAO, B. N. et RAHMAN, S. (2000). An efficient meshless method for fracture analysis of cracks. *Computational Mechanics*, 26:398–408.
- RAO, B. N. et RAHMAN, S. (2001). A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 78:647–657.
- RAO, B. N. et RAHMAN, S. (2002a). Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods—Part I : Rates of stress intensity factors. *Computational Mechanics*, 28:351–364.
- RAO, B. N. et RAHMAN, S. (2002b). Probabilistic fracture mechanics by Galerkin meshless methods—Part II : Reliability analysis. *Computational Mechanics*, 28: 365–374.
- RAO, B. N. et RAHMAN, S. (2004). An enriched meshless method for non-linear fracture mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 59:197–223.
- RICE, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35:379–386.
- SARIGUL, N. et GALLAGHER, R. H. (1989). Assumed stress function finite element method : Two-dimensional elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28:1577–1598.
- SCHÖLLMANN, M., FULLAND, M. et RICHARD, H. A. (2003). Development of a new software for adaptive crack growth simulations in 3d structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:249–268.
- SHEPARD, D. (1968). A two-dimensional function for irregularly spaced points. *In 23rd ACM National Conference*, pages 517–524.
- SIH, G. C. (1974). Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, 10:305–321.
- STRANG, W. G. et FIX, G. J. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

- SUKUMAR, N., MORAN, B., BLACK, T. et BELYTSCHKO, T. (1997). An element-free Galerkin method for three-dimensional fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 20:170–175.
- SULSKY, D., ZHOU, S. J. et SCHREYER, H. J. (1995). Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. *Computer Physics Communications*, 87:236–252.
- SUMI, Y. (1985). Computational crack path prediction. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 4:149–156.
- SUMI, Y., NEMAT-NASSER, S. et KEER, L. M. (1985). On crack path stability in a finite body. *Engineering Fracture Mechanics*, 22:759–771.
- TABBARA, M. R. et STONE, C. M. (1998). A computational method for quasi-static fracture. *Computational Mechanics*, 22:203–210.
- TIMOSHENKO, S. P. et GOODIER, J. N. (1987). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill, New York.
- TU, S. T. et CAI, R. Y. (1988). A coupling of boundary elements and singular integral equation for the solution of the fatigue cracked body. In BREBBIA, C. A., éditeur : *Boundary Elements X, Vol. 3 Stress Analysis*, pages 239–247, Berlin. Springer-Verlag.
- VALLABHAN, C. V. G. et AZENE, M. (1982). A finite element model for plane elasticity problems using the complementary energy theorem. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 18:291–309.
- VENTURA, G., XU, J. X. et BELYTSCHKO, T. (2002). A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by EFG. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 54:923–944.
- WESTERGAARD, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 6:49–53.
- XU, Y. et SAIGAL, S. (1998a). An element free Galerkin method for stable crack growth in an elastic solid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154:331–343.
- XU, Y. et SAIGAL, S. (1998b). Element free Galerkin study of steady quasi-static crack growth in plane strain tension in elastic-plastic materials. *Computational Mechanics*, 22:255–265.
- YAGAWA, G. et YAMADA, T. (1996). Free mesh method : a new meshless finite element method. *Computational Mechanics*, 18:383–386.
- YAN, A. M. et NGUYEN-DANG, H. (1995). Multiple-cracked fatigue crack growth by BEM. *Computational Mechanics*, 16:273–280.
- YAU, J. F., WANG, S. S. et CORTEN, H. T. (1980). A mixed-mode crack analysis of isotropic solids using conservation laws of elasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 47:335–341.

- ZHANG, Z. Q., ZHOU, J. X., WANG, X. M., ZHANG, Y. F. et ZHANG, L. (2004). Investigations on reproducing kernel particle method enriched by partition of unity and visibility criterion. *Computational Mechanics*, 34:310–329.
- ZHONG, H. G. (1991). *Estimateurs d'erreur a posteriori et adaptation de maillages dans la méthode des éléments finis*. Thèse de doctorat, Université de Liège.
- ZHU, T., ZHANG, J.-D. et ATLURI, S. N. (1998). A local boundary integral equation method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 21:223–235.
- ZIENKIEWICZ, O. C. et ZHU, J. Z. (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24:337–357.